درس : ریاضی عمومی 1

مدرس : استادآقای حبیب شکوری

تهیه کننده : سجاد افشار

تلگرام استاد : @Ekjdm_shakouri (کلیک کنید)

ایمیل استاد : habib.shakouri@gmail.com (کلیک کنید)

ریاضی زبان مادری علم و طبیعت است پس با دقت و علاقه پیگیر باشید تا نهایت نظم و زیبایی ها را کشف کنید !!

نکات : من سعی کردم جزوه را به کامل ترین شکل ممکن بنویسم، همراه پاسخ کامل و توضیحات لازمه ، قسمت های " آبی رنگ " صورت سوال ها ، قسمت " های قرمز رنگ " پاسخ سوالات و قسمت های " سبز رنگ " در این جزوه توضیحات اضافه و مراحل حل مسئله می باشد ، قسمت هایی که تایم مشخص شده ، تایم ویدیو های ضبط شده از جلسات برای آن مسئله می باشد، همچنین جهت خدمت به علم و جامعه بشری حاضرم سوالات و اشکالات شما را پاسخگو باشم ، برای ارتباط با من می توانید از طریق آیدی تلگرام @Best_shopper در ارتباط باشید

با سپاس فراوان تقدیم به استاد عزیز و فوق العاده ام ، استاد شکوری گرامی و خوش اخلاق ♡

Subject
Date

"فهرست مطالب"

(فصل اول) تابع

basamar

Subject
Date

(فصل دوم) حد و پیوستگی

تعریف حد و پیوستگی - قضایای حد - حدود مبهم - رفع ابهام حالت $\frac{0}{0}$

تعمیم مفهوم حد - حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت - حد نامتناهی در بی نهایت

رفع ابهام حالت $\frac{\infty}{\infty}$ - رفع ابهام حالت $\infty - \infty$ - رفع ابهام حالت $\infty \times 0$

پیوستگی

صفحه‌ی 59 - 81

(فصل سوم) مشتق و کاربرد آن

تعریف مشتق - مشتق راست و چپ - قضایای مشتق - فرمول‌های مشتق

مشتقات توابع مثلثاتی - مشتقات توابع نمایی - فرمول‌های کلی مشتق - قاعده هوپیتال

رفع ابهام حالت 1^{∞} - رفع ابهام حالت 0^{0} و ∞^{0} صفحه‌ی 82 - 101

(فصل چهارم) انتگرال و روش‌های انتگرال‌گیری

تعریف و قضایای انتگرال - فرمول‌های انتگرال - روش‌های انتگرال‌گیری

روش انتگرال‌گیری جزء به جزء - روش نردبانی (پلکانی) صفحه‌ی 101 - 113

basamad

Subject: 1
Year: Month: Date:

ریاضی عمومی (فصل اول)

تابع / **زوج مرتب** : به دوتایی (a,b)
که در آن ترتیب قرار گرفتن (b,a) اهمیت داشته باشد
را زوج مرتب گویند

$$(a,b) \neq (b,a)$$
$$(a,a) \neq a$$
$$(a,b) = (c,d) \Longrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$$

ضرب دکارتی : حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه A و B را با $A\times B$
نشان می دهیم و برابر است با

مجموعه اول ، مجموعه دوم ، زوج های مرتب

$$A\times B = \{(a,b) \mid \underline{a}\in A , \underline{b}\in B\}$$

مؤلفه اول ، مؤلفه دوم

رابطه : به هر زیرمجموعه $A\times B$ یک رابطه از مجموعه A به مجموعه B
می گویند ، رابطه را با حرف R نشان می دهیم و داریم :

$$R \subseteq A\times B$$

مثال) - حاصل ضرب دکارتی - همه اعضای $A\times B$ - مجموعه ۹ عضوی

$$A=\{1,2,3\} \quad , \quad B=\{a,b,c\}$$

مجموعه زوج های مرتب که مولفه های اول از مجموعه A و ...

$$A\times B = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c)\}$$

زیر مجموعه $2^9 = 2^9 = 512 \rightarrow$ رابطه

Subject: 2

$R_1 = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$ $R_1 \subseteq A \times B$ ✓ رابطه

$R_2 = \{(2,b),(3,a),(2,a),(1,a)\} \subset A \times B$ ✓

$R_3 = \{(1,a)(2,a),(3,c),(4,a)\} \not\subset A \times B$ رابطه نیست

تعریف تابع: رابطه‌ای است از مجموعه A به مجموعه B که در آن هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه اول یکسان نباشد.

$R = \{(1,a),(1,a),(2,b)\}$ تشخیص تابع از روی زوج های مرتب

$= \{(1,a),(2,b)\}$ تابع هست

مثال) x و y را چنان بیابید که رابطه زیر تابع باشد

$R = \{(1,2),(3,\overset{4}{\overbrace{x-5y}}),(2,5),(3,4),(1,\overset{2}{\overbrace{2x+y}})\}$

دستگاه شامل دو معادله دو مجهول x و y

$\times 5 \begin{cases} x - 5y = 4 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - \cancel{5y} = 4 \\ 10x + \cancel{5y} = 10 \end{cases}$ مقدار x

$11x = 14 \rightarrow \boxed{x = \frac{14}{11}}$

و داخل معادله دوم مقدار می دهیم

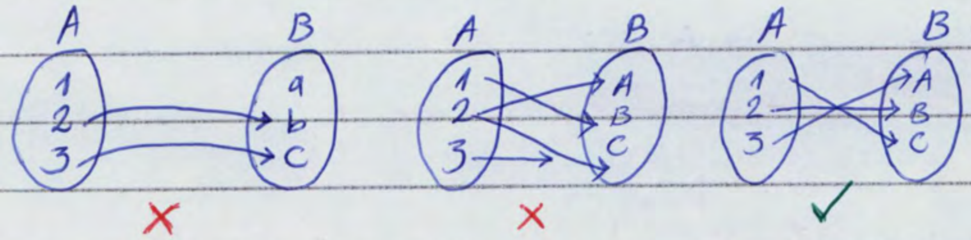
$\frac{28}{11} + y = 2 \Longrightarrow y = 2 - \frac{28}{11} = \frac{-6}{11}$

مقدار y

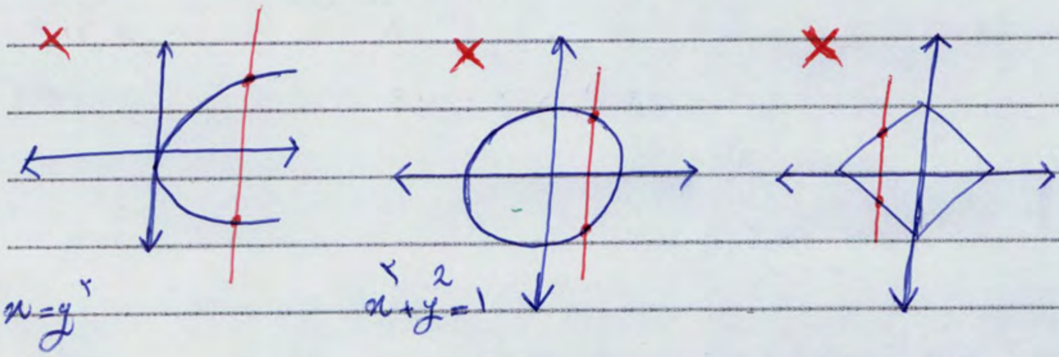
چون ضریب y 1 است و راحت تر بدست می آید تو جفتش

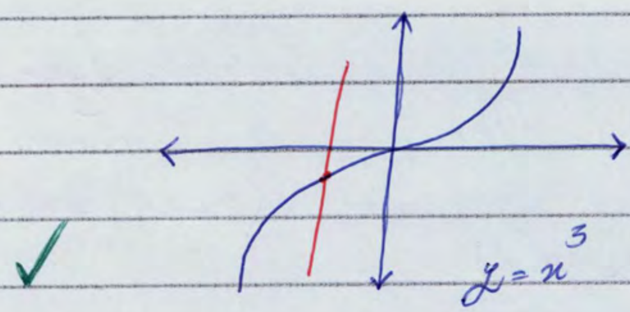
Subject: 3
Year: Month: Date:

تشخیص تابع از روی نمودار ون : رابطه‌ای که از هر عضو مجموعه A دقیقاً یک پیکان
به سمت مجموعه B خارج شده باشد را یک تابع از مجموعه A به مجموعه B می‌نامیم.



تشخیص از روی دستگاه دکارتی :
هر خطی موازی محور y ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.





Subject: 4
Year: Month: Date:

تعریف ضابطه: قانون یا فرمولی که بتوان به کمک آن رابطه ریاضی بین تمام مولفه‌های دوم تابع را با مولفه‌های اول برقرار کرد را ضابطه تابع می‌گویند

$$f = \{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۱۰),(۴,۱۷) \ldots\}$$

مؤلفه دوم = مؤلفه اول × مؤلفه اول + 1

$(x,y) \quad y = x^2 + 1 \longrightarrow$ ضابطه تابع f

$$f(x) = x^2 + 1$$

توابع حقیقی مقدار:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y$$

$$f(x) = y \iff (x,y) \in f$$

تشخیص تابع از روی ضابطه:

$$a = b \Longrightarrow f(a) = f(b)$$

عکس نقیض

$$(p \Longrightarrow q) \simeq (\sim q \Longrightarrow \sim p)$$

$$f(a) \neq f(b) \Longrightarrow a \neq b$$

Subject: 5

Year: Month: Date:

مثال) نشان دهید ضابطه $f(x) = x^3$ یک تابع است ؟

$f(a) \neq f(b) \Longrightarrow a^3 \neq b^3$

$\Longrightarrow \sqrt[3]{a^3} \neq \sqrt[3]{b^3}$

$\longrightarrow a \neq b$ f یک تابع است

$\longrightarrow \boxed{a \neq b}$

مثال) نشان دهید ضابطه $x^2+y^2=1$ بیانگر یک تابع نیست ؟

$x=0 \Longrightarrow 0+y^2=1 \longrightarrow y^2=1$

$\longrightarrow y=\pm 1 \longrightarrow$ تابع نیست

$0 \longrightarrow +1$

$0 \longrightarrow -1$

Subject: 6

Year: Month: Date:

مثال) آیا ضابطه $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$ بیانگر یک تابع هست

$f(a) \neq f(b) \Longrightarrow \dfrac{a+2}{a-3} \neq \dfrac{b+2}{b-3}$

$\longrightarrow (a+2)(b-3) \neq (a-3)(b+2)$

$\longrightarrow \cancel{ab} - 3a + 2b \cancel{-6} \neq \cancel{ab} + 2a - 3b \cancel{-6}$

$-3a - 2a \neq -3b - 2b$

$-5a \neq -5b \Longrightarrow a \neq b$ تابع هست

مثال) آیا ضابطه $|x| + |y| = 4$ بیانگر یک تابع هست ؟

نکته) هرگاه y دارای توان زوج یا داخل قدر مطلق باشد آنگاه معمولا ضابطه داده شده تابع نیست .

$x = 0 \Rightarrow |0| + |y| = 4 \longrightarrow |y| = 4$

$y = \pm 4 \longrightarrow$ تابع نیست

$|x| + |y| = 0 \longrightarrow x = y = 0 \longrightarrow \{(0,0)\}$ تابع هست

Subject: I

Year: Month: Date:

دامنه تابع : به مجموعه تمام مؤلفه های اول تابع، دامنه تابع می گوییم
و آن را با حرف D (Domain) نشان می دهیم.
به عبارت دیگر دامنه تابع بزرگترین زیرمجموعه اعداد حقیقی است که تابع
به ازای آن قابل تعریف است.

* — در صورتی که زیر رادیکال با فرجه زوج عدد منفی باشد، در این صورت
این عبارت ریاضی قابل تعریف نیست، بی معنا
* — صفر در مخرج

تعریف بُرد تابع : به مجموعه تمام مؤلفه های دوم تابع برد تابع می گوییم و
آن را با حرف R_f (Range) نشان می دهیم. به عبارت دیگر
اثر تابع f بر روی تمام اعضای دامنه برابر است با برد تابع f

$$f(D) = R$$

① توابع چندجمله‌ای :

اندیس n

به تابع با ضابطه

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

اعداد حقیقی

که در آن $n \in W$ و اعداد $a_0 , a_1 , \dots , a_n$ اعداد حقیقی و ثابت ($a_n \neq 0$) هستند یک چندجمله‌ای درجه n می‌گوییم

دامنه توابع چندجمله‌ای کل اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ می‌باشد

$$D_f = \mathbb{R} = (-\infty , +\infty)$$

② تابع گویا : یا همان کسری ها

به تابع با ضابطه $f(x) = \frac{P(x)}{q(x)}$ که در آن $P(x)$, $q(x)$

توابع چندجمله‌ای به ترتیب از درجه n و m هستند یک تابع گویا می‌نامیم

دامنه تابع گویا برابر است با کل اعداد حقیقی بجز ریشه‌های مخرج

$$D_f = \mathbb{R} - \{x \mid q(x) = 0\}$$

ریشه‌های مخرج

③ توابع رادیکالی :

۳-۱ : توابع رادیکالی با فرجه زوج : به تابع با ضابطه

$f(x) = \sqrt[2n]{g(x)}$ یک تابع رادیکالی با فرجه زوج گوییم

($n \in N$) می‌دانیم زیر رادیکال با فرجه زوج عدد منفی قرار نمی‌گیرد پس

باید $g(x)$ نامنفی باشد یعنی $g(x) \geq 0$

برای حل نامعادله فوق از بحث تعیین علامت استفاده می‌کنیم

Subject: 9

Year: Month: Date:

تعیین علامت :

(۱) عبارت درجه اول : شکل کلی این عبارات به صورت $ax+b$ می باشد . برای تعیین علامت این عبارت ابتدا باید ریشه آن را بدست آوریم :

معادله درجه اول

$$ax+b=0 \longrightarrow ax=-b \longrightarrow x=\frac{-b}{a}$$

ریشه

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
عبارت $ax+b$	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

(۲) عبارت درجه دوم : شکل کلی این عبارات به صورت ax^2+bx+c می باشد. ابتدا باید ریشه این عبارت را بدست آوریم پس داریم :

معادله درجه دوم

$$ax^2+bx+c=0$$

برای حل معادله درجه دوم ، کامل ترین روش روش دلتا می باشد (Δ)

$$\Delta=b^2-4ac$$

برای دلتا سه حالت زیر رخ می دهد

(ادامه صفحه بعد)

Subject: 10

Year: Month: Date:

حالت اول : اگر Δ مثبت باشد :

دو ریشه حقیقی و متمایز داریم :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

طرفین موافق علامت a

وسط مخالف علامت a

حالت دوم : اگر Δ برابر صفر باشد ، یک ریشه مضاعف (تکراری) داریم

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
ax^2+bx+c	موافق علامت a	0	موافق علامت a

Subject: 11

حالت سوم : اگر Δ منفی باشد : آنگاه ریشه حقیقی نداریم

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
ax^2+bx+c	همواره موافق علامت a

۳-۲ : توابع رادیکالی با فرجه فرد : تابع با ضابطه

ریشه

$$f(x) = \sqrt[2n+1]{g(x)}$$

را یک تابع رادیکالی با فرجه فرد می‌گوییم. دامنه تابع رادیکالی با فرجه فرد برابر است با دامنه تابع زیر رادیکال

$$D_f = D_g$$

مثال دامنه توابع زیر را بدست آورید.

1) $f(x) = x^4 - 3x + 1 \longrightarrow D_f = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \dfrac{4x^2 - 9}{2x - 3}$

ریشه مخرج : $2x - 3 = 0 \longrightarrow 2x = 3 \Longrightarrow x = \dfrac{3}{2}$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

Subject: 12
Year: Month: Date:

(۳) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

$x^2 - 3x \geq 0 \longrightarrow$ مثبت و صفر

تجزیه و فاکتورگیری

ابتدا ریشه‌ها : $x^2 - 3x = 0 \longrightarrow x(x-3) = 0$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{یا} \\ x = 3 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x^2-3x		$+$	0	$-$	0	$+$	
		ج	ج		ج	ج	

$D_f = (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$

(۴) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{4 - x^2}}$

$\dfrac{x}{4-x^2} \geq 0$

* هرجا ریشه مخرج خودمان شد برابرایش با بازه باز (ت)

ریشه صورت : $\boxed{x = 0}$

ریشه مخرج : $4 - x^2 = 0 \longrightarrow 4 = x^2 \longrightarrow \boxed{x = \pm 2}$

*

$D_f = (-\infty, -2) \cup [0, 2)$

x	$-\infty$		-2		0		$+2$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$4-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{x}{4-x^2}$		$+$	ت	$-$	0	$+$	ت	$-$	
		ج	ت		ج ج		ت		

اگر در مخرج کسر ~~...~~ صفر باشد کسر تعریف نمی‌شه

- هر جا که صورت صفر باشه

- در ریشه‌های مخرج کسر تعریف نشده

Subject: 13
Year: Month: Date:

(5) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2 - x}}$

ریشه مخرج : $x^2 - x = 0 \Longrightarrow x(x-1) = 0$

$\Longrightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ \downarrow \\ \boxed{x = 1} \end{cases} \qquad D_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

(6) $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2 - x + 10}$ 1:36 / جلسه سوم

$x^3 - x^2 - x + 10 \geq 0$

ابتدا ریشه‌ها : $x^3 - x^2 - x + 10 = 0$

به روش حدس و آزمایش $x = -2$ یکی از ریشه‌های معادله فوق می‌باشد
حال با استفاده از تقسیم چند جمله‌ای ها داریم .

نکته : چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x - a$ بخش پذیر است هرگاه $P(a) = 0$

$P(-2) = 0 \Longrightarrow$ بخش پذیر است $\underbrace{x - (-2)}_{x+2}$

ادامه صفحه بعدی

Subject: ~~14~~ Year: Month: Date:

مقسوم — مقسوم علیه

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - x^2 - x + 10 & x+2 \\ \cline{2-2}
-\cancel{x^3} - 2x^2 & x^2 - 3x + 5 \\ \cline{1-1}
\quad -\cancel{3x^2} - x + 10 & \\
\quad +\cancel{3x^2} + 6x & \\ \cline{1-1}
\qquad +5x + 10 & \\
\qquad -5x - 10 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

خارج قسمت

$$\frac{x^3}{x} = x^2$$

$$\frac{-3x^2}{x} = -3x$$

$$\frac{5x}{x} = 5$$

همواره مثبت

$$x^3 - x^2 - x + 10 = (x+2)(x^2 - 3x + 5) = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x+2=0 \Longrightarrow \boxed{x=-2} \\ x^2 - 3x + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(5) = 9 - 20 = -11$$

ریشه حقیقی نداریم

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$
x^2-3x+5	$+$		$+$
x^3-x^2-x+10	$-$	0	$+$
		ج	ج

$$D_f = [-2, +\infty)$$

Subject: 15
Year: Month: Date:

"اعمال جبری روی توابع"

۱) عمل جمع دو تابع :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

۲) عمل تفریق دو تابع :

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

۳) ضرب دو تابع :

$$(f.g)(x) = f(x) . g(x)$$

$$D_{f.g} = D_f \cap D_g$$

۴) تقسیم دو تابع :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{f(g)}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

Subject: 16
Year: Month: Date:

5) ترکیب توابع :

$(fog)(x) = f(g(x))$

یعنی در تابع f بجای x ها $g(x)$ را قرار دهیم.

$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$

مثال) هرگاه داشته باشیم $g(x) = \frac{x}{x-2}$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$

ضابطه و دامنه توابع $\frac{f}{g}$ ، fog ، gof را بدست آورید

$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$, $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{x}{x-2}} = \frac{x-2}{x(x+1)}$

$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = (\mathbb{R} - \{-1\}) \cap (\mathbb{R} - \{2\})$

$- \{x \mid x = 0\} = \mathbb{R} - \{-1, 2, 0\}$

جلسه چهارم 00:24

Subject: ۱۷
Year: Month: Date:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{g(x)+1} = \frac{1}{\frac{x}{x-۲}+\frac{1}{1}} = \frac{1}{\frac{x+x-۲}{x-۲}}$$

$$= \frac{\frac{1}{1}}{\frac{۲x-۲}{x-۲}} = \frac{x-۲}{۲x-۲}$$

$$D_{fog} = \{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\} = \{x\in \mathbb{R}-\{۲\} \mid \frac{x}{x-۲}\in \mathbb{R}-\{-1\}\} = \{x\neq ۲ \mid \frac{x}{x-۲}\neq -1\}$$

محاسبات $\frac{x}{x-۲} \neq \frac{-1}{1} \Longrightarrow x \neq -x+۲ \Longrightarrow x+x\neq ۲ \Longrightarrow x\neq 1$

$$= \{x\neq۲ \mid x\neq1\} = \mathbb{R}-\{1,۲\}$$

۱) $(gof)(x) =$

Subject: 18

Year: Month: Date:

ت

تمرین: هرگاه داشته باشیم $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{1-x}$

دامنه و ضابطه توابع $f+g$ ، $\frac{g}{f}$ ، fog ، $go\cancel{f}g$
را بدست آورید.

Subject: 19
Year: Month: Date:

مثال) اگر $fog(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \frac{x-1}{x}$ باشد ضابطه تابع f را مشخص کنید.

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{x} \Longrightarrow f(\underbrace{\frac{x-1}{x}}_{t}) = \frac{1}{x}$$

$f(x) = ?$ $f(t) = ?$

$$\frac{x-1}{x} = \frac{t}{1} \Longrightarrow xt = x-1 \Longrightarrow xt - x = -1$$

فاکتور $\Longrightarrow x(t-1) = -1 \Longrightarrow x = \frac{-1}{t-1}$

$$\Longrightarrow f(t) = \frac{1}{\frac{-1}{t-1}} = \frac{t-1}{-1} = -t+1$$

$$\Longrightarrow \boxed{f(x) = -x+1}$$

۰۱:۲۴ /۳

مثال) با فرض $f(\underbrace{2-x}_{t}) = x^2 + 2x$ ضابطه تابع f را تعیین کنید.

$2-x = t \Longrightarrow x = 2-t$

$$f(t) = \underbrace{(2-t)^2 + 2(2-t)}_{\text{مربع}} = 4 - 4t + t^2 + 4 - 2t$$

$$= t^2 - 6t + 8 \Longrightarrow \boxed{f(x) = x^2 - 6x + 8}$$

۰۱:۰۳

Subject: 20

Year: Month: Date:

مثال) با فرض $fog(x) = x^2 + 2x + 3$ و $f(x) = 2x + 1$

ضابطه تابع g را بدست آورید.

$(fog)(x) = f(g(x)) = 2g(x) + 1 = x^2 + 2x + 3$

$\Longrightarrow 2g(x) = x^2 + 2x + 2 \longrightarrow \boxed{g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1}$

چهارم 8، 9

مثال) اگر $g(x) = x^2 + bx + c$ و $f(x) = 1 - x$

مقادیر b، c را چنان تعیین کنید که $fog(x) = -x^2 + 5x + 4$

مثال) با فرض $f\left(\frac{x}{x-2}\right) = 3x + 4$ ضابطه $f(x)$ را بیابید

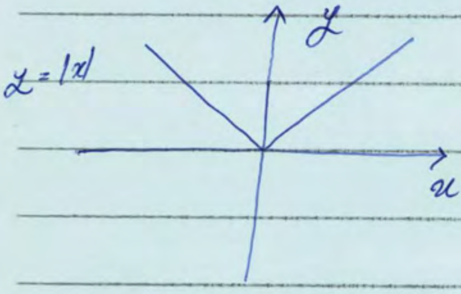
مثال) اگر $fog(x) = x^2 - 5x$ و $f(x) = 2x^3 - 4$

ضابطه تابع g را بیابید

"تابع قدرمطلق"

تابع $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ را تابع قدرمطلق x می‌نامیم

دامنه این تابع $D_f = \mathbb{R}$ و بردآن $R_f = [0 , +\infty)$



$|-4| = 4$

$|5| = 5$

$|\underbrace{1-\sqrt{2}}_{\text{منفی}}| = -1+\sqrt{2}$

ویژگی های قدرمطلق:

1) $|x^2| = |x|^2 = x^2$ 2) $|xy| = |x||y|$

3) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ 4) $|x+y| \leq |x|+|y|$ (نامساوی مثلث)

5) $|x| - |y| \leq |x-y|$

6) $\sqrt{x^2} = |x|$

7) $|x| = a \xleftrightarrow{a>0} x = \pm a$

8) $|x| \leq a \xleftrightarrow{a>0} a \leqslant x \leqslant a$

Subject: 22

Year: Month: Date:

(9) $|x| \geq a \xleftrightarrow{a>0} x \geq a$ یا $x \leq -a$

(10) $-|x| \leq x \leq |x|$

* اثبات ویژگی شماره ۸

$$
\begin{array}{l}
\quad -|y| \leq y \leq |y| \\
+\ -(|x|+|y|) \leq x+y \leq (|x|+|y|) \xrightarrow{(8)} \boxed{|x+y| \leq |x|+|y|}
\end{array}
$$

مثال) دامنه توابع زیر را بدست آورید

(1) $f(x) = \dfrac{5x}{2^{|x|}-8}$

ریشه مخرج : $2^{|x|} - 8 = 0 \Longrightarrow 2^{|x|} = 2^{3} \Longrightarrow |x| = 3$

$\Longrightarrow \boxed{x = \pm 3} \qquad D_f = \mathbb{R} - \{\pm 3\}$

(2) $f(x) = \sqrt{2-|x|}$

عبارت زیر رادیکال $\geq 0 \Longrightarrow 2 - |x| \geq 0 \Longrightarrow 2 \geq |x|$

$\Longrightarrow |x| \leq 2 \Longrightarrow -2 \leq x \leq 2 \qquad D_f = [-2, 2]$

چون مساوی دارد

Subject: 23

Year: Month: Date:

چهارم 1:40

③ $f(x) = \sqrt{|x-1| - 3}$

$|x-1| - 3 \geq 0 \Longrightarrow |x-1| \geq 3 \xrightarrow{٩} \begin{cases} x-1 \geq 3 \Longrightarrow \boxed{x \geq 4} \\ \text{اجتماع } \underline{\text{یا}} \\ x-1 \leq -3 \Longrightarrow \boxed{x \leq -2} \end{cases}$

$D_f = (-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$

ت ④ $f(x) = \dfrac{2x+1}{|2x-1| - 5}$

⑤ $f(x) = \sqrt{\dfrac{|x|+1}{1-x^2}}$ $\qquad \dfrac{|x|+1}{1-x^2} \geq 0$

ریشه صورت : $|x|+1 = 0 \Longrightarrow |x| = -1$ $\cancel{\text{غ}}$ ریشه ندارد

ریشه مخرج : $1-x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$\|x\|+1$		+		+		+	
$1-x^2$		−	0	+	0	−	
کل کسر		−	ت.ن	+	ت.ن	−	

ج

$D_f = (-1, 1)$

Subject: 24
Year: Month: Date:

جلسه چهارم 1:57

6) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x\sqrt{x^2-9}}$

$\sqrt{0} = 0$

$x^2 - 9 \cancel{\geq} 0 \Longrightarrow x^2 > 9 \longrightarrow x > \sqrt{9}$ یا $x < -\sqrt{9}$

$\Downarrow$

$x > 3$ یا $x < -3$

$\boxed{x \neq 0}$

روش دوم
تعیین علامت

ریشه: $x^2 - 9 = 0 \longrightarrow x^2 = 9 \longrightarrow x = \pm 3$

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
x^2-9		$+$	0	$-$	0	$+$	
		ج				ج	

$D_f = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

ت 7) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{2-x}}$

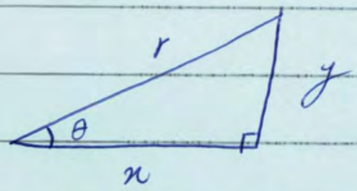
ت 8) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{|x| - 2}$

ت 9) $f(x) = \dfrac{2x+1}{|2x-1| - 5}$

Subject: 25
Year: Month: Date:

مثلثات

سال اول دبیرستان



رابطه فیثاغورس : $x^2 + y^2 = r^2$

$$\sin\theta = \frac{\text{ضلع روبه رو } \theta}{\text{وتر}} = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ضلع مجاور } \theta}{\text{وتر}} = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{ضلع روبه رو } \theta}{\text{ضلع مجاور } \theta} = \frac{y}{x} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{ضلع مجاور } \theta}{\text{ضلع مقابل } \theta} = \frac{x}{y} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2}$$

$$= \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = \boxed{1}$$

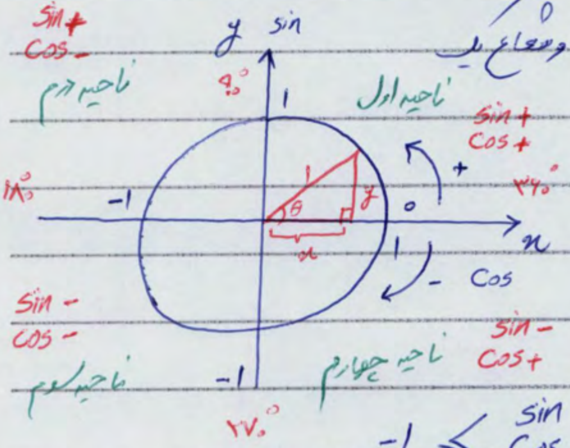
تذکر : $\sin^2\theta \neq \sin\theta^2$

$\sin^2\theta = (\sin\theta)^2$

Subject: 26
Year: Month: Date:

دایره مثلثاتی

دایره ای است به مرکز مبدا مختصات و شعاع یک



$$\sin\theta = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\theta = \frac{x}{1} = x$$

$$-1 \leq \sin, \cos \leq 1$$

زاویه های اصلی

θ	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
$\sin\theta$	$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	۰	-۱	۰
$\cos\theta$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰	۱
$\tan\theta$	۰	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	۱	$\sqrt{3}$	ت/ن	۰	ت/ن	۰
$\cot\theta$	ت/ن	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	۰	ت/ن	۰	ت/ن

÷ ۴ جذر

sin, Cos : ۱ ۰ -۱

مرحله اول عددگذاری ۰ تا ۴.

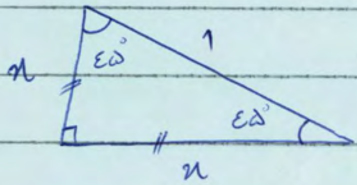
مرحله دوم روی تمام اعداد علامت رادیکال میگذاریم و...

tan, cot : ۰ ت/ن

مرحله سوم به تمام اعداد مخرج ۲ قرار میدهیم و...

Subject: 27
Year: Month: Date: 05:49/5

$\sin ٤٥^\circ = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$?



$x^٢ + x^٢ = ١^٢$

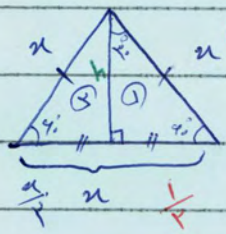
$٢x^٢ = ١ \longrightarrow x^٢ = \frac{١}{٢}$

$x = \pm\sqrt{\frac{١}{٢}} \longrightarrow x = \frac{\sqrt{١}}{\sqrt{٢}}$

$= \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

$\sin 45^\circ = \frac{x}{1} = x = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

$\hat{\triangle ١} \cong \hat{\triangle ٢}$ (وتر و یک زاویه حاده)



$\sin ٣٠^\circ = \frac{١}{٢}$

$\cos ٣٠^\circ = \quad h^٢ = ١^٢ - (\frac{١}{٢})^٢ = ١ - \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤} \quad h = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

Subject: 28
Year: Month: Date:

"تبدیل درجه به رادیان" 59/5

درجه رادیان

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi}$$

رادیان

$$D = ۳۰^\circ \Longrightarrow \frac{۳۰}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Longrightarrow R = \frac{۳۰ \times \pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۶}$$

$$D\ ۹۰^\circ \Longrightarrow \frac{۹۰}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Longrightarrow R = \frac{۹۰ \times \pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۲}$$

نسبت های مثلثاتی زوایای : $\left(۰ < \theta < \frac{\pi}{۲} \right)$

ناحیه اول

۱) $(\pi - \theta)$:

ناحیه دوم

$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$ $\qquad$ $\cot(\pi - \theta) = -\cot\theta$

مثال $\cos\frac{۲\pi}{۳} = \cos(۱۲۰^\circ) = \cos(۱۸۰ - ۶۰) = -\cos ۶۰^\circ = -\frac{۱}{۲}$

ناحیه دوم

۱) واحد اندازه گیری از رادیان به درجه
۲) چک کردن زاویه نسبت زاویه های اصلی ؛ آیا بیشتر یا کمتر / نزدیکترین زاویه اصلی
۳) درجا علامت ناحیه و تکراری دهیم ...

Subject: 29

Year: Month: Data:

1:16/5

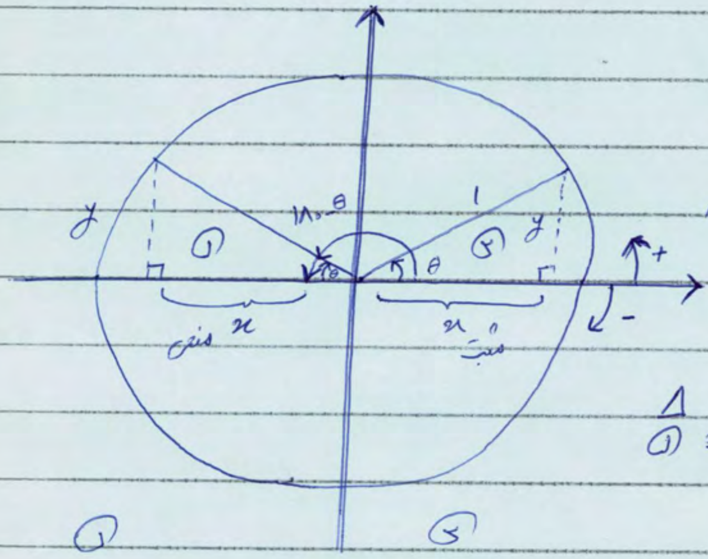
$D = ۱۸۰^\circ$

$$\frac{۱۸۰}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi}$$

$\cancel{\pi = ۱۸۰^\circ}$

$\pi \simeq ۳٫۱۴$

$$R = \frac{\cancel{۱۸۰} \times \pi}{\cancel{۱۸۰}} = \pi \quad \text{رادیان}$$



$\pi - \theta$

$۱۸۰^\circ - \theta$

$\underset{۱}{\Delta} \cong \underset{۲}{\Delta}$ وتر و یک زاویه حاده

$\sin(۱۸۰ - \theta) = \sin\theta$

$\cos(۱۸۰ - \theta) = -\cos\theta$

$\tan(۱۸۰ - \theta) = -\tan\theta$

اول ناحیه مشخص بشه

دوم ببینیم اون نسبت مثلثاتی توی اون ناحیه چه علامت داره

Subject: 30

زاویه ② $(\pi+\theta)$: ← ناحیه سوم

$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$

$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$

$\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$

1:27/5

مثال) $\sin\frac{5\pi}{4} = \sin 225^\circ = \sin(180+45)$

$5\times 45 = 225$

$= -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\frac{5\pi}{4} = \sin\frac{4\pi+\pi}{4} = \sin\left(\frac{4\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)$ 4π 8π 12π 16π

$= \sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

1:30 /5

زاویه ③ $(2\pi-\theta)$

ناحیه چهارم

$\sin(2\pi-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(2\pi-\theta) = \cos\theta$

$\tan(2\pi-\theta) = -\tan\theta$

1:38 /5

مثال) $\sin\frac{5\pi}{3} = \sin\left(\frac{6\pi-\pi}{3}\right) =$ 3π 6π 9π

$\sin\left(\frac{6\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Subject: 31
Year: Month: Date:

زاویه ۴) $:(\underbrace{۲\pi+\theta}_{\text{ناحیه اول}})$

$\sin(۲\pi+\theta) = \sin\theta$

$\cos(۲\pi+\theta) = \cos\theta$

$\tan(۲\pi+\theta) = \tan\theta$

1:42/15

مثال) $\tan\left(\frac{۷\pi}{۳}\right) = \tan\left(\frac{۶\pi+\pi}{۳}\right)$

$= \tan\left(۲\pi+\frac{\pi}{۳}\right) = \tan\frac{\pi}{۳} = \sqrt{۳}$

$D = ۶۰^\circ \longrightarrow \frac{۶۰}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \longrightarrow R = \frac{۶۰\times\pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۳}$

$R = \frac{۵\pi}{۳} \rightarrow D = \frac{۵\times\overset{۶۰}{\cancel{۱۸۰}}}{\underset{۱}{\cancel{۳}}} = ۳۰۰^\circ$

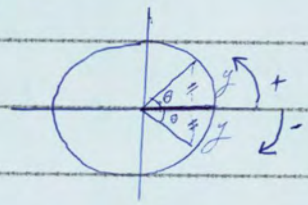
زاویه ۵) $:(-\theta)$

ناحیه چهارم

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

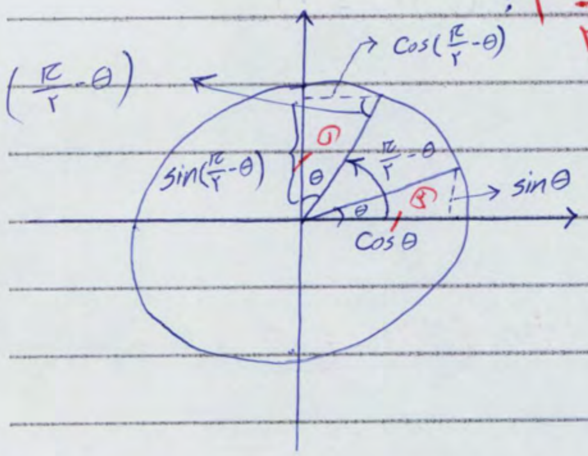


مثال) $\tan\left(-\frac{\pi}{۴}\right) = -\tan\frac{\pi}{۴} = -۱$

1:49/15

زاویه ۶ : $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

ناحیه اول



$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cot\theta$$
$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \tan\theta$$

زاویه ۷ $\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$

ناحیه دوم

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\cot\theta \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\tan\theta$$

زاویه ۸ $\left(\frac{3\pi}{2} \pm \theta\right)$ ← ناحیه چهارم

ناحیه سوم

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\pm\theta\right) = -\cos\theta$$

* برای زاویه‌های ۹۰ و ۲۷۰ تبدیل sin به cos را هم باید انجام دهیم

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\pm\theta\right) = \pm\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}\pm\theta\right) = -\cot\theta \qquad \cot\left(\frac{3\pi}{2}\pm\theta\right) = -\tan\theta$$

Subject: 33

Year: Month: Date:

زاویه ⑨ $\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)$

ناحیه چهارم

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) = \cos$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) = +\sin$

$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) = -\cot$ $\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) = -\tan\theta$

★ نکته) اگر $0 < D < 90°$ باشد آنگاه 00:18 /6

$$\sin D° \simeq \frac{16 \times (D+1)}{1000}$$

$$\sin 15° \simeq \frac{16 \times 16}{1000} = 0/256$$

$\sin 15° = 0/258$ با ماشین حساب 00:22 /6

مثال) فرض کنید $\sin 15° \simeq 0/25$ باشد نسبت های مثلثاتی زیر را حساب کنید.

فرمول ۶ الف) $\cos 75° = \cos(90-15) = \sin 15° = 0/25$

فرمول ۷ ب) $\cos 105° = \cos(90+15) = -\sin 15° = -0/25$

ج) $\cos 15° = \sin^2 15° + \cos^2 15° = 1 \longrightarrow \cos^2 15° = 1 - 0/0625 = 0/9375$

ادامه صفحه بعدی

Subject: 34

$x^۲ = a \rightarrow x = \pm\sqrt{a}$

$\Rightarrow \cos ۱۵^\circ = \pm\sqrt{۰٫۹۳۷۵} \longrightarrow \cos ۱۵^\circ \sqrt{۰٫۹۳۷۵}$

منفی قابل قبول نیست چون
cos در ناحیه اول مثبت است

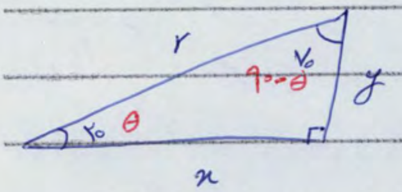
د) $\tan ۷۵^\circ = \dfrac{\sin ۷۵^\circ}{\cos ۷۵^\circ} = \dfrac{\sqrt{۰٫۹۳۷۵}}{۰٫۲۵}$

$\sin ۷۵^\circ = \sin(۹۰ - ۱۵) = \cos ۱۵^\circ = \sqrt{۰٫۹۳۷۵}$

هـ) $\sin ۲۸۵^\circ = \sin(۲۷۰ + ۱۵) = -\cos ۱۵ = -\sqrt{۰٫۹۳۷۵}$

و) $\cos ۲۵۵^\circ = \cos(۲۷۰ - ۱۵) = -\sin ۱۵ = -۰٫۲۵$

★ (اثبات تبدیل sin به cos از طریق خود مثلث قائم الزاویه و تعریف نسبت های مثلثاتی)



$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$ $\qquad$ $\sin(۹۰ - \theta) = \dfrac{x}{r}$

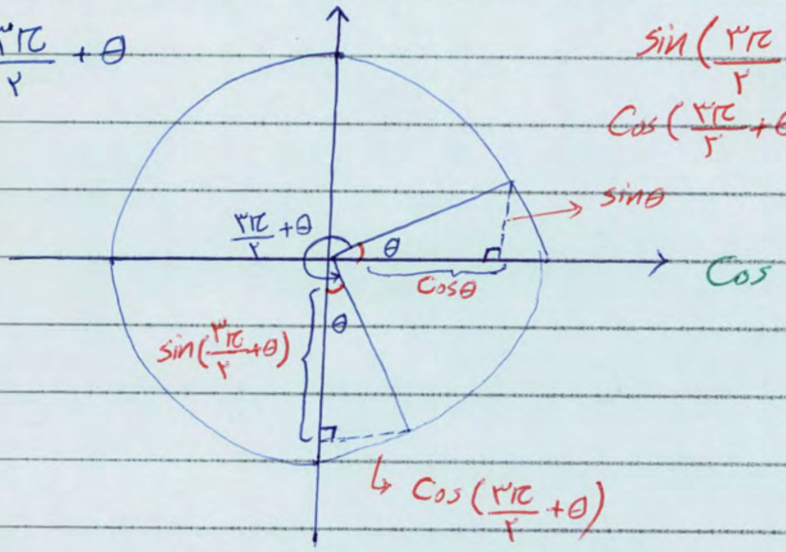
$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ $\qquad$ $\cos(۹۰ - \theta) = \dfrac{y}{r}$

$\sin(۹۰ - \theta) = \cos\theta$ | $\cos(۹۰ - \theta) = \sin\theta$

Subject: 35

Year: Month: Date:

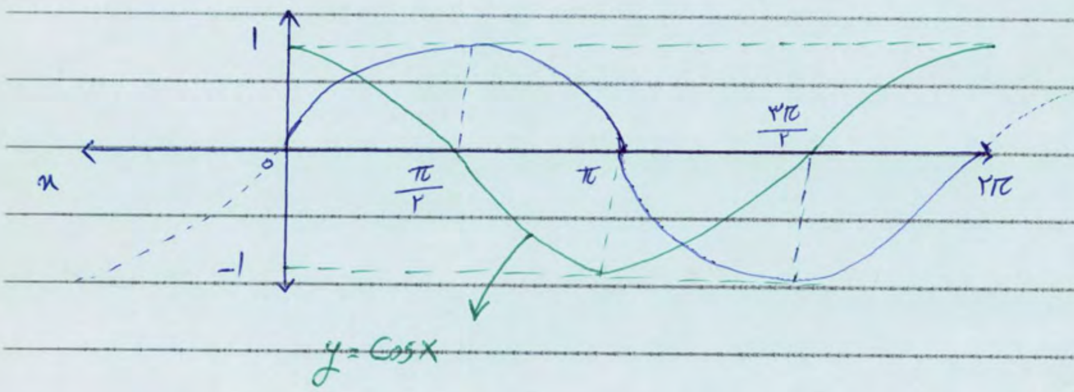
$\frac{۳\pi}{۲}+\theta$



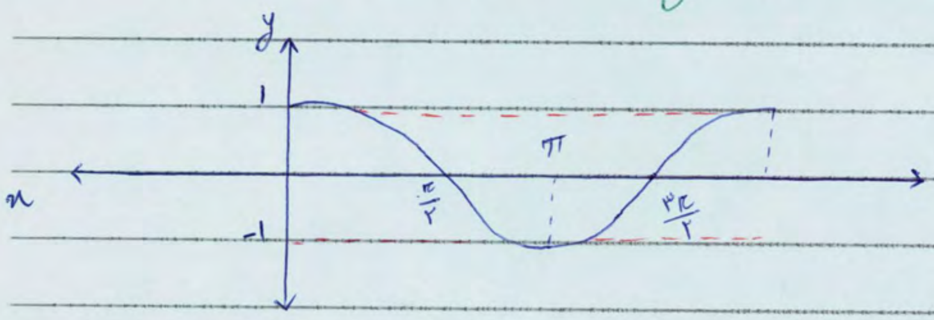
$$\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}+\theta\right) = -\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}+\theta\right) = \sin\theta$$

نمودار $y = \sin x$



نمودار $y = \cos x$



Subject: 36
Year: Month: Date:

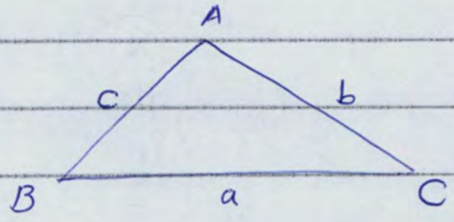
کاربرد مثلثات

① رابطه کسینوس‌ها

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc . \cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac . \cos B$

$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab . \cos C$



② مساحت مثلث :

$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A$ → بر abc تقسیم شود

③ رابطه سینوس‌ها

$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$

نسبت های مثلثاتی مجموع و تفریق دو زاویه :

① $\sin(x+y) = \sin x . \cos y + \cos x . \sin y$

② $\sin(x-y) = \sin x . \cos y - \cos x . \sin y$

③ $\sin 2x = 2 \sin x . \cos x$

④ $\cos(x+y) = \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$

Subject: 37

Year: Month: Date:

(5) $\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$

4* (6) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

(7)

نکته: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{cases}$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

(8) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

7 (9) $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$

$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

8 (10) $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

(11) $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cdot \cos y - \sin x \sin y} = \frac{\dfrac{\sin x \cancel{\cos y}}{\cos x \cdot \cancel{\cos y}} + \dfrac{\cancel{\cos x} \sin y}{\cancel{\cos x} \cos y}}{1 - \dfrac{\sin x}{\cos x}\dfrac{\sin y}{\cos y}}$$

Subject: 38
Year: Month: Date:

11 (12) $\tan(x-y) = \dfrac{\tan - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$

11 (13) $\tan 2x = \dfrac{\tan - \tan y}{1 - \tan^2 x}$

(14) $\cot(x+y) = \dfrac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$

$$\frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)} = \frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\sin x \cos y + \cos x \sin y}$$

(15) $\cot(x-y) = \dfrac{-\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x - \cot y}$

14 (16) $\cot 2x = \dfrac{\cot^2 x - 1}{2\cot x}$

Subject: 39

Year: Month: Date: 1:24 /6

مثال) مقادیر زیر را محاسبه کنید.

الف) $\sin ۷۵^\circ =$

$\sin(۳۰+۴۵) = \sin ۳۰ \times \cos ۴۵ + \sin ۴۵^\circ \times \cos ۳۰^\circ$

$= \frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}{۴}$

ب) $\cos ۱۵^\circ = \cos(۴۵-۳۰) = \cos ۴۵ \times \cos ۳۰$

$+ \sin ۴۵ \times \sin ۳۰ = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$

تمرین ج) $\tan ۷۵^\circ =$

د) $\sin ۲۲/۵^\circ = \sin^{۲} ۲۲/۵ = \frac{۱-\cos \overbrace{۲\times ۲۲/۵^\circ}^{۴۵^\circ}}{۲} = \frac{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}$

$= \frac{۲-\sqrt{۲}}{۴} \Longrightarrow \sin ۲۲/۵^\circ = \sqrt{\frac{۲-\sqrt{۲}}{۴}} = \frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$

Subject: 40
Year: Month: Date:

تمرین

ه) $\cos 22.5^\circ =$

تبدیل حاصل ضرب به حاصل جمع :

① $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cancel{\cos x \cdot \sin y}$

② $\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cancel{\cos x \cdot \sin y}$

$+$

$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cdot \cos y$

$\Rightarrow \boxed{\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]}$ ★

Subject: 41
Year: Month: Date:

برای تفریق این دو رابطه خط خورده

④ $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \cancel{\sin x \sin y}$

⑤ $\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \cancel{\sin x \sin y}$

$+$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cdot \cos y$$

$$\Longrightarrow \boxed{\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]}$$

۵ و ۴ / تفریق بالا

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x \sin y$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sin x \cdot \sin y = \frac{-1}{2}\left[\cos(x+y) - \cos(x-y)\right]}$$

Subject: 42
Year: Month: Date:

تبدیل حاصل جمع به حاصل ضرب

① $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$

1 $\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$

② $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$

2 $\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$

③ $\sin x \sin y = \frac{-1}{2}\left[\cos(x+y) - \cos(x-y)\right]$

$l \quad y = \frac{A-B}{2} \quad , \quad x = \frac{A+B}{2}$ در فرمول های فوق بجای قرار می دهیم

$x+y = A \qquad x-y = B$

3 $\cos A - \cos B = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$

نکته) فرمول های تبدیل حاصل جمع به حاصل ضرب در حل معادلات مثلثاتی استفاده زیادی دارد.

Subject: 43

"حل معادلات مثلثاتی"

برحسب رادیان

اعداد صحیح

① $\sin x = \sin\alpha \Longrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ \text{یا} \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases} : k \in \mathbb{Z}$

② $\cos x = \cos\alpha \longrightarrow x = 2k\pi \pm \alpha \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

③ $\tan x = \tan\alpha \longrightarrow x = k\pi + \alpha \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

سه فرمول برای تعیین دامنه توابع مثلثاتی کاربرد دارد.

مثال) دامنه توابع زیر را تعیین کنید. ص: 25/7

تابع کسری

① $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x - 1}$

رادیان

ریشه مخرج ; $\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \cos 0$

$\Rightarrow x = 2k\pi \pm 0 = 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

$D_f = \mathbb{R} - \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Subject: 44
Year: Month: Date:

ص: 3117

$$f(x) = \frac{1}{۲\sin x + 1}$$

ریشه مخرج : $۲\sin + 1 = ۰ \Longrightarrow \frac{۲\sin x}{۲} = \frac{-1}{۲} \rightarrow \sin x = -\frac{1}{۲}$

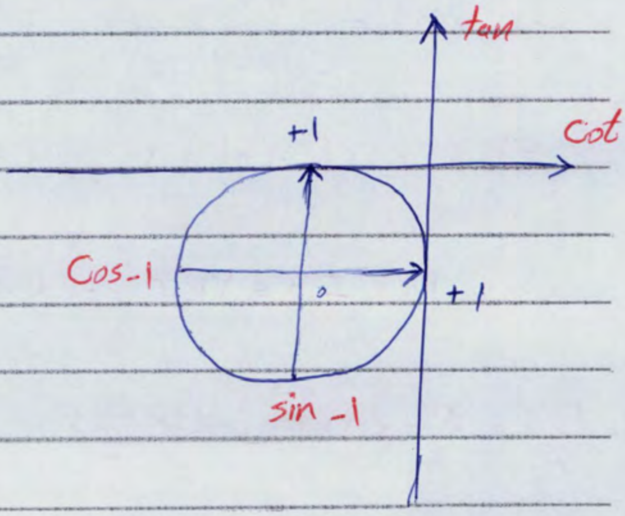
$= -\sin\frac{\pi}{۶} = \sin\left(\frac{-\pi}{۶}\right)$

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \\ \text{یا} \\ x = ۲k\pi + \pi + \frac{\pi}{۶} \end{cases} \quad D_f = \mathbb{R} - \left\{ ۲k\pi - \frac{\pi}{۶}, ۲k\pi + \pi + \frac{\pi}{۶} \right\} \; ; \; k \in \mathbb{Z}$$

تمرین

$f(x) = \tan x$



Subject: 45
Year: Month: Date:

" توابع جزء صحیح "

تعریف : به بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x ، جزء صحیح x گوئیم

و آن را با $[x]$ نشان می دهیم

$[\sqrt{3}] = 1$ $\qquad$ $[-0/001] = -1$

$\{1, 0, -1, -2, \dots\}$ $\qquad$ $-1, -2, -3, \dots$

$[\pi] = 3$

$\pi = 3/14 \qquad 3, 2, 1, \dots$

تعریف دیگر جزء صحیح :

اگر n یک عدد صحیح باشد و داشته باشیم

$n \leqslant x < n+1$ آنگاه $[x] = n$

مثال) $\left[\frac{2}{3}\right] = 0$ $\qquad$ $\left[\frac{\pi}{4}\right] = 0$

$0 < \frac{2}{3} < 1$ $\qquad$ $0 < \frac{3/14}{4} < 1$

Subject: 46
Year: Month: Date:

$(n \in \mathbb{Z})$ "ویژگی های جزء صحیح"

۱) $[x] \in \mathbb{Z}$

۲) $[x+n] = [x] + n$

۳) $\underbrace{[x+[x+[x+\cdots+[x]]]]}_{x \text{ تا } n} = n[x]$

مثال) $[x+[x]] = [x]+[x] = ۲[x]$

۴) $n \leqslant x < n+1 \iff [x] = n$

۵) $[x] \leqslant x < [x]+1$

۶) $x-1 < [x] \leqslant x$

00:57 /7

مثال) معادلات زیر را حل کنید.

۱) $[۲x+1] = ۵$

ویژگی ۲ ویژگی ۴

$[۲x]+1 = ۵ \Rightarrow [۲x] = ۴ \Rightarrow ۴ \leqslant ۲x < ۵ \xrightarrow{\div ۲}$

$\boxed{۲ \leqslant x < \frac{۵}{۲}}$

Subject: ٤٦

Year: Month: Date:

(۲) $-۲\,[x^۲+۳]=۱ \Longrightarrow [x^۲+۳]=-\frac{۱}{۲}$ ✗

غ ق ق چون حاصل جزء صحیح همواره یک عدد صحیح است.

اول باید ضریب رو از بین ببریم

ویژگی سوم

(۳) $[x+[x]]=٤ \quad \frac{۲[x]}{۲}=\frac{٤}{۲} \longrightarrow [x]=۲$

$۲ \leqslant x < ۳$

ویژگی چهارم

(٤) $[\,|x|\,]=۰ \Longrightarrow ۰ \leqslant |x| < ۱$

ویژگی ۷ قدر مطلق

$\longrightarrow |x|<۱ \Longrightarrow \boxed{-۱<x<۱}$

قدر مطلق یک عبارت اگر برابر با a شد خود عبارت برابر است با $\pm a$ / یا برابر با ۱+ یا با ۱-

تمرین (۵) $|\,[x]\,|=۱$ - ویژگی ٤

تمرین (٦) $\left[\frac{x-۳}{۲}\right]=-۱$

- ببین اینو چکار میکنه
- اول طرفین ضرب در ۲ که مخرج ۲ از بین بره
- بعد واحد به طرفین که ۳- از بین بره

Subject: 47 1:15 /7

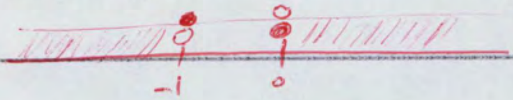
مثال) دامنه توابع زیر را تعیین کنید :

(1) $f(x) = \dfrac{x+1}{[x]+1}$

ویژگی چهارم

ریشه مخرج : $[x]+1=0 \Longrightarrow [x]=-1 \longrightarrow -1 \leq x < 0$

$D_f = \mathbb{R} - [-1,0) = (-\infty,-1) \cup [0,+\infty)$



تمرین

(2) $f(x) = \dfrac{x-1}{2[x]-1}$

(3) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{5-[x]}}$

عبارت زیر رادیکال $> 0 \Longrightarrow 5-[x] > 0$

$\longrightarrow 5 > [x] \Longrightarrow [x] < 5 \Longrightarrow \boxed{x < 5}$

$D_f = (-\infty, 5)$

Subject: 48

تمرین ④ $f(x) = \sqrt{[x] - ۳}$

تعریف تابع یک به یک: تابع f را یک به یک گوییم هرگاه برای هر

اگر $a, b \in D_f$ و $a \neq b$ باشد آنگاه $f(a) \neq f(b)$

$$a \neq b \Longrightarrow f(a) \neq f(b)$$

به عبارت دیگر: $f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b$

(شرط یک به یکی)

Subject: 49

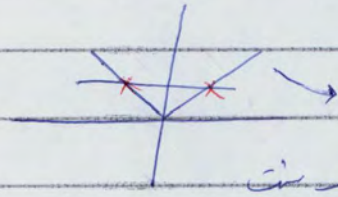
Year: Month: Date:

تشخیص تابع یک به یک از روی :

① از روی زوج های مرتب : هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه دوم یکسان نباشد

② از روی نمودار ون : به هیچ عضو از مجموعه دوم بیشتر از یک پیکان وارد نشده باشد

③ از روی دستگاه دکارتی : هر خط موازی با محور x ها نمودار تابع یک به یک را حداکثر در یک نقطه قطع می کند



$\rightarrow y = |x|$

یک به یک نیست

مثال) یک به یکی تابع زیر را بررسی کنید. 1:36 /7

① $f(x) = 2x^3 + 1$

$f(a) = f(b) \Longrightarrow 2a^3 + \cancel{1} = 2b^3 + \cancel{1} \Longrightarrow \frac{2a^3}{2} = \frac{2b^3}{2}$

$\Longrightarrow a^3 = b^3 \Longrightarrow a = b$ if $a^2 = b^2 \Longrightarrow a = \pm b$

پس f یک تابع یک به یک است

Subject: 50

② $f(x) = x^2$ $f(a) = f(b) \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow a = \pm b$

f یک به یک نیست

$٤^٢ = ١٦$

$(-٤)^٢ = ١٦$

"تابع معکوس"

تعریف : هرگاه در زوج های مرتب تابع f جای مؤلفه اول و دوم را

با هم عوض کنیم رابطه جدیدی حاصل می شود که آن را معکوس تابع f می گوییم

و آن را با نماد f^{-1} نشان می دهیم . لازم به ذکر است معکوس تابع f

همواره یک تابع نیست . اگر f^{-1} تابع باشد آن را تابع معکوس f می گوییم

1:48:17

مثال)

$f = \{(١,٢), (٣,-١), (٤,٢), (-٦,٣)\}$

معکوس تابع را بدست آورید؟ تابع هست ؛ چون مؤلفه اول یکسان ندارد

$f^{-1} = \{(٢,١), (-١,٣), (٢,٤), (٣,-٦)\}$

تابع نیست یعنی f^{-1} تابع نیست ؛ مؤلفه اول یکسان دارد

Subject: 51
Year: Month: Date:

مثال)

$$f = \{(1,2),(3,-1),(4,5),(6,3)\}$$

$$f^{-1} = \{(2,1),(-1,3),(5,4),(3,6)\}$$

تابع هست یعنی f^{-1} نیز تابع شد پس به f^{-1} تابع معکوس f می‌گوییم

* چه شرطی مثال قبل داشت که این نداشت؟ دلیل اینکه اینجا مؤلفه دوم یکسان نداشت (تعریف تابع یک به یک از روی زوج های مرتب)

شرط یک به یک $\Longrightarrow f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b$

* تابع f معکوس پذیر است اگر و تنها اگر یک به یک باشد.

مثال) معکوس توابع زیر را به دست آورید 01:07 / 8

① $f(x) = \dfrac{3x-2}{4x+7}$ $\quad f(a) = f(b) \rightarrow \dfrac{3a-2}{4a+7} = \dfrac{3b-2}{4b+7}$

$$(3a-2)(4b+7) = (3b-2)(4a+7)$$

$$\rightarrow \cancel{12ab} + 21a - 8b - \cancel{14} = \cancel{12ab} + 21b - 8a - \cancel{14}$$

$$\Rightarrow 21a + 8a = 21b + 8b \rightarrow 29a = 29b \Rightarrow \boxed{a = b}$$

پس تابع f یک به یک است ⇐ پس معکوس پذیر است.

Subject 52

Date

"تعیین رابطه تابع f^{-1}"

① به جای $f(x)$، y را قرار می‌دهیم:

$$y = \frac{3x-2}{4x+7}$$

② باید کاری کنیم که x برحسب y نوشته شود:

$$4xy + 7y = 3x - 2$$

$$\Longrightarrow 4xy - 3x = -7y - 2$$

$$\Longrightarrow x(4y-3) = -7y - 2 \Longrightarrow x = \frac{-7y-2}{4y-3}$$

③ در رابطه فوق جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{-7x-2}{4x-3}}$$

00:27 /8

مثال ۲) $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$

شرط یک به یک: $f(a) = f(b) \Longrightarrow \sqrt[3]{a+2} = \sqrt[3]{b+2}$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۳}} a + \cancel{2} = b + \cancel{2} \longrightarrow \boxed{a = b}$$

پس تابع f یک به یک است

مرحله دوم) $y = \sqrt[3]{x+2} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۳}} y^3 = x + 2$

رشد: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

$\Longrightarrow x = y^3 - 2$ رابطه تابع وارون

مرحله سوم) $\boxed{f^{-1}(x) = x^3 - 2}$

نکات:

$$\begin{cases} D_{f^{-1}} = R_f \\ R_{f^{-1}} = D_f \end{cases}$$

$0<a<1$
$a>1$

توابع نمایی : به تابع $y = a^x$

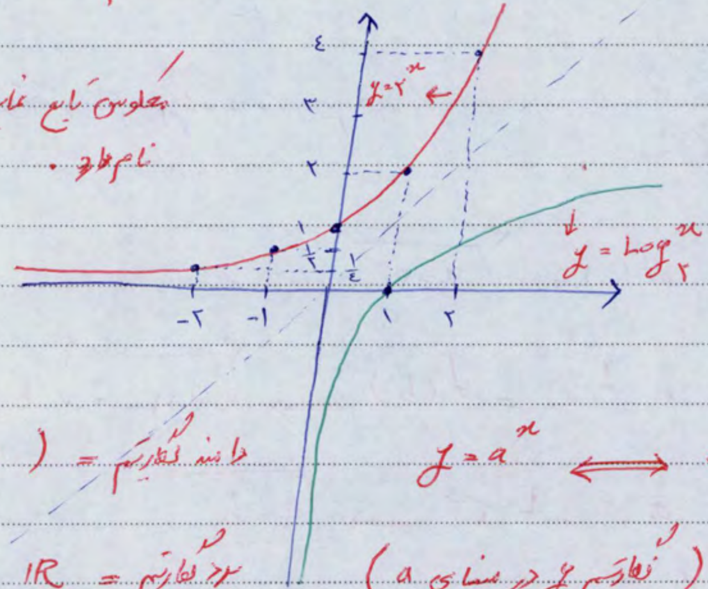
که در آن $a > 0$ و $a \neq 1$ تابع نمایی می‌گوییم

دامنه توابع نمایی $\mathbb{R}$ و برد آن $(0, +\infty)$ می‌باشد.

$y = 2^x$ $\qquad 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

معکوس تابع نمایی، تابع لگاریتم نام دارد.



$y = a^x \Longleftrightarrow x = \log_a y$

(لگاریتم y در مبنای a)

$(0, +\infty)$ = دامنه لگاریتم

$\mathbb{R}$ = برد لگاریتم

Subject 54
Date

نکته : تابع نمایی یک به یک است پس معکوس پذیر می باشد ، معکوس

تابع نمایی را تابع لگاریتمی می نامیم

$y = a^x \longleftrightarrow x = \log_a^y$

00 : 52 : 8

مثال) $\log_3^{81} = ? \quad x \Longrightarrow 3^x = 81 = 3^4 \Longrightarrow \boxed{x = 4}$

$81 = 9 \times 9 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 \quad\quad \Longrightarrow \log_3^{81} = 4$

ویژگی های لگاریتم

$\left(\begin{matrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{matrix} \right) \qquad y = a^x \Downarrow x = \log_a^y$

1. $\log_a^1 = 0$

2. $\log_a^a = 1$

3. $\log_a^{x \cdot y} = \log_a^x + \log_a^y$

4. $\log_a^{\frac{x}{y}} = \log_a^x - \log_a^y$

basamar

Subject 55
Date

(5) $\log_a^{x^n} = n \log_a^x$

(6) $\log_{a^m}^{x^n} = \frac{n}{m} \log_a^x$

تغییر مبنا

(7) $\log_a^x = \frac{\log_b^x}{\log_b^a}$ (تغییر مبنا)

نکته: عدد b باید شرایط مبنا را داشته باشد

$\log = \log_{10}$ پیش فرض

کاربرد: در ماشین حساب

$\log_3^2 = \frac{\log^2}{\log^3}$

(8) $\log_a^x \times \log_b^a = \log_b^x$

از روی 7

(9) $\log_a^x = \frac{1}{\log_x^a}$

از روی 7، بجای b، x بذاریم
اگر بخواهیم جای عدد و مبنا رو عوض کنیم
کاربرد:
$\log_2^{10} = \frac{1}{\log^2}$ لگاریتم ۲ رو حساب کنیم و بعد برعکس

(10) $a^{\log_a^x} = x$

y

$\log_a^x = y \Longrightarrow a^y = x$

پایه، عدد مبنا باید هر دو برابر باشند

اثبات

$3^{\log_3^x} = x$

$a^y = ?$

(گنگ)

لگاریتم طبیعی : به لگاریتم در مبنای عدد نپر $e \simeq 2.71$ لگاریتم طبیعی می‌گوییم و آن را با Ln نشان می‌دهیم.

$$\log_e = Ln$$

(1) $Ln_1 = 0$ (2) $Ln_e = 1$ (3) $Ln\,xy = Ln\,x + Ln\,y$

(4) $Ln\,x^n = n\,Ln\,x$ *(5) $e^{Ln\,x} = x$

نکته : دامنه توابع لگاریتمی :

$$y = \log_{g(x)}^{f(x)}$$

$$D = \left\{ x \mid \underline{f(x) > 0}\ ,\ \underline{g(x) > 0}\ ,\ \underline{g(x) \neq 1} \right\}$$

نکته : نابرابری‌های لگاریتمی

$$\log_a^x \leqslant \log_a^y \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant y & : 0 < a < 1 \\ x \leqslant y & : a > 1 \end{cases}$$

$$\log_a^x \leqslant y \longrightarrow \begin{cases} x \geqslant a^y & : 0 < a < 1 \\ x \leqslant a^y & : a > 1 \end{cases}$$

مثال) دامنه توابع زیر را پیدا کنید . 1:18 /8

① $f(x) = \log_2\left(\frac{x-1}{2x}\right)$

$\frac{x-1}{2x} > 0$

ریشه صورت : $x-1=0 \Longrightarrow \boxed{x=1}$

ریشه مخرج : $2x=0 \Longrightarrow \boxed{x=0}$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$2x$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x-1}{2x}$	$+$	‖	$-$	0	$+$
	ج				ج

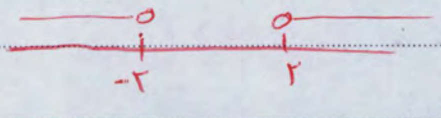
$D_f = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

② $f(x) = \ln(|x|-2)$ 1:27 /8

$|x|-2>0 \Longrightarrow |x|>2$

$\Longrightarrow x>2$ یا $x<-2$

$D_f = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$



Subject 58

Date

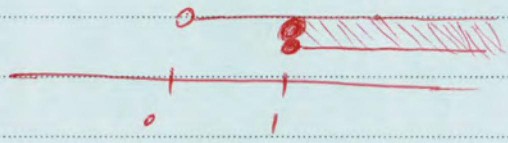
③ $f(x) = \sqrt{\operatorname{Ln} x}$ 1:30 /8

شرط اول : زیر رادیکال $\geq 0 \longrightarrow \operatorname{Ln} x \geq 0$

$\longrightarrow \operatorname{Log}_e^{x} \geq 0 \longrightarrow \boxed{x \geq e^{0} = 1}$

شرط دوم : $\boxed{x > 0}$

$D_f = [1, +\infty)$

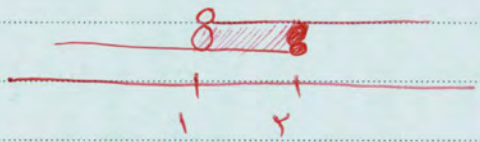


1:35 /8

④ $f(x) = \sqrt{\operatorname{Log}_{0/5}^{(x-1)}}$

شرط اول : $\operatorname{Log}_{0/5}^{(x-1)} \geq 0 \Rightarrow (x-1) \leq (0/5)^{0} \Rightarrow \boxed{x \leq 2}$

شرط دوم : $x - 1 > 0 \longrightarrow \boxed{x > 1}$



$D_f = (1, 2]$

basamar

(فصل دوم)

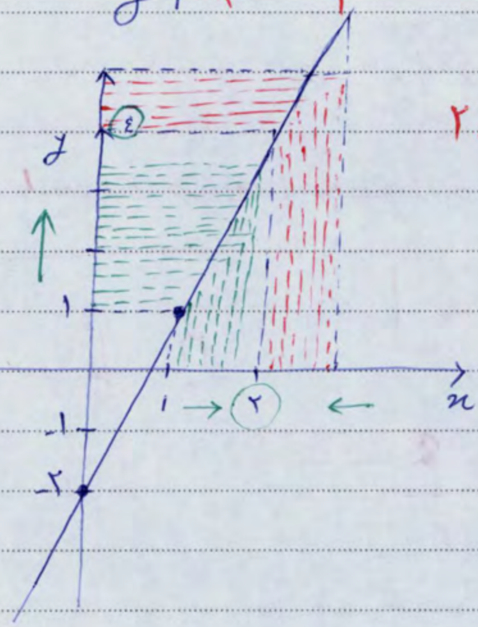
" حد و پیوستگی "

$f(x) = ۳x - ۲$

x	۰	۱
y	-۲	۱

حد راست تابع $f(x)$ در نقطه ۲

حد چپ تابع $f(x)$ در نقطه ۲



تعریف حد چپ و حد راست تابع از روی نمودار

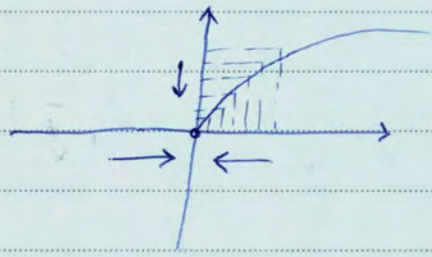
تعریف : اگر روی محور xها از سمت راست (چپ) به نقطه $x = a$ نزدیک شویم و مقادیر تابع $f(x)$ روی محور yها به عددی مانند L نزدیک و نزدیک‌تر شوند در این صورت عدد L را حد راست (چپ) تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ گوییم و به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$\lim_{x \to a^{\mp}} f(x) = L$$

تعریف : تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ دارای حدی برابر عدد L است هرگاه حد راست و حد چپ تابع $f(x)$ در این نقطه موجود و با هم برابر و مساوی عدد L باشند، در این صورت می‌نویسیم :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = \text{حد ندارد}$$



$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \sqrt{x} = \text{وجود ندارد}$$

"قضایای حد"

اگر a , C , k اعداد حقیقی و $n \in \mathbb{N}$ باشد آنگاه:

1) $$\lim_{x\to a} C = C$$ حد تابع ثابت

2) $$\lim_{x\to a} x = a$$

3) $$\lim_{x\to a} f(x) = L \Longrightarrow \lim_{x\to a} kf(x) = kL$$

4) $$\lim_{x\to a} x^n = a^n$$

قضیه: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$

① $$\lim_{x\to a}\left(f(x) \overset{-}{\underset{\times}{+}} g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) \overset{-}{\underset{\times}{+}} \lim_{x\to a} g(x) = L_1 \overset{-}{\underset{\times}{+}} L_2$$

② $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

در صورتی معنا دارد که مخرج کسر ($L_2 \neq 0$)

③ $$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^n = \left(L_1\right)^n$$

④ $$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \begin{cases} \sqrt[n]{L_1} & : L_1 > 0 \text{ و } n \text{ زوج یا فرد} \\ \text{حد ندارد} & : L_1 < 0 \text{ و } n \text{ زوج} \\ \text{در این صورت حد چپ و راست را بررسی می‌کنیم} & : L_1 = 0 \text{ و } n \text{ زوج} \end{cases}$$

Subject 62
Date

مثال) حدود زیر را محاسبه کنید. 19 00:40

① $\lim_{x\to ۲} (x^۲ - ۳x + ۱) = \lim_{x\to ۲} x^۲ - \lim_{x\to ۲} ۳x + \lim_{x\to ۲} ۱ =$

$\left(\lim_{x\to ۲} x\right)^۲ - ۳\lim_{x\to ۲} x + \lim_{x\to ۲} ۱ = (۲)^۲ - ۳(۲) + ۱ = ٤ - ۶ + ۱ = -۱$

② $\lim_{x\to ۱} \frac{۳x^۲ - ۱}{x^۳ + ۲x - ۱} = \frac{۳(۱)^۲ - ۱}{(۱)^۳ + ۲(۱) - ۱} = \frac{۳ - ۱}{۱ + ۲ - ۱} = \frac{۲}{۲} = ۱$

19 00:51

حدود مبهم : اگر حاصل حد یکی از حالت ٤ حالت

$\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ ، $0 \times \infty$ ، $\infty \times \infty$ ، 0 ، ∞^{∞}

1^{∞} ، ∞^{0} ، 0^{∞} باشد ، حد را مبهم گوییم و برای بدست آوردن

مقدار حد باید آن را رفع ابهام نمائیم.

رفع ابهام حالت $\frac{0}{0}$: اگر $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$

باشد حد را مبهم گوئیم. عامل مبهم در این حالت عبارت $x - a$ می‌باشد

برای رفع ابهام باید عامل مبهم را از صورت و مخرج به کمک تجزیه حذف کنیم

Subject 63
Date

مثال) حدود زیر را محاسبه کنید. 1/05 /9

① $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-4}{x^2-5x+4} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

رفع ابهام $= \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(x-1)} = \dfrac{1}{3}$

$x \longrightarrow a$

$\boxed{x-a}$

② $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{x-1} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

رفع ابهام : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+3)}{\cancel{(x-1)}} = 1+3 = 4$

$x \longrightarrow 1$

$\boxed{x-1}$

Subject 64
Date 1:14 /9

3 $\lim_{x \to -1} \frac{3x^3 + x^2 + x + 3}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$

رفع ابهام : $\lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(3x^2 - 2x + 3)}{\cancel{(x+1)}(x-1)} = \frac{3+2+3}{-1-1} = \frac{8}{-2} = -4$

$x \to -1$

$\boxed{x+1}$

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 + x^2 + x + 3 & x+1 \\ \hline -3x^3 - 3x^2 & 3x^2 - 2x + 3 \\ \hline -2x^2 + x + 3 & \\ -2x^2 + 2x & \\ \hline 3x + 3 & \\ -3x - 3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\frac{3x^3}{x} = 3x^2$

$\frac{-2x^2}{x} = -2x$

$\frac{3x}{x} = 3$

4 $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{4 - x} = \frac{0}{0}$ مبهم 1:22 /9

رفع ابهام : $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{-(x-4)} \times \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2}$

$(x-4)$

$= \lim_{x \to 4} \frac{\cancel{(x-4)}}{-\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{-4}$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Subject 65
Date

1:28 ,9

(5) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} \times \frac{\sqrt{x+4} + 2}{\sqrt{x+4} + 2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} + \cancel{4} - \cancel{4}}{\cancel{x}\left(\sqrt{x+4} + 2\right)} = \frac{1}{4}$$

قضیه: اگر x برحسب رادیان باشد آنگاه

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

نکته)

(1) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin mx}{nx} = \frac{m}{n}$$

(2) $$\lim_{x \to 0} \frac{nx}{\sin mx} = \frac{n}{m}$$

(3) $$\lim_{x \to 0} \frac{\tan mx}{nx} = \frac{m}{n}$$

(4) $$\lim_{x \to 0} \frac{\tan mx}{\sin nx} = \frac{m}{n}$$

به طور کلی

$$\lim_{\square \to 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1$$

basamar

Subject 66

Date 1:47 /9

① $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{5x} = \frac{3}{5}$

② $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{\tan 3x} = \frac{7}{3}$

③ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x \cdot \sin 3x^2}{x^2 \sin x} = \lim \frac{\sin 2x}{\sin x} \times \frac{\sin 3x^2}{x^2} = 2\times 3 = 6$

④ $\lim_{x\to 2} \frac{\sin(x^2-4)}{x-2} \times \frac{(x+2)}{(x+2)} = \lim_{x\to 2} (x+2)\frac{\sin(x^2-4)}{(x^2-4)}$

$= (2+2)\times 1 = 4$

⑤ $\lim_{x\to -1} \frac{\sin(x+1)}{(1-x^2)}$

⑥ $\lim_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin \pi(t+1)}{t}$ 1:48

روش تغییر متغیر $\begin{cases} t = x-1 \\ x = t+1 \end{cases} : \begin{cases} x \to 1 \\ t \to 0 \end{cases}$ $\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$ ناحیه سوم

$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\pi t+\pi)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-\sin \pi t}{t} = -\pi$

Subject 67
Date 1:54 /9

(7) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{t\to 0} \dfrac{\cos(t+\frac{\pi}{2})}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{-\sin t}{t} = -1$

$$\begin{cases} t = x - \frac{\pi}{2} \\ x = t + \frac{\pi}{2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x \to \frac{\pi}{2} \\ t \to 0 \end{cases}$$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta$

ربع دوم

تعمیم مفهوم حد :

۱) حدهای نامتناهی :

$\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$; $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{1000}$	$\cdots$	$-\frac{1}{10^6}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	-1	-2	-3	-10	-100	-1000	$\cdots$	-10^6

$$\left(\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{2}{1} = \boxed{2}$$

Subject 68
Date

نکته)

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty \qquad \frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty$$

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty \qquad \frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty$$

$$\to 0^+ \qquad \frac{1}{0^+} = +\infty$$

صفر حدی

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$(+\infty) - (-\infty) = +\infty$$

$$(+\infty) - (+\infty) = \infty - \infty$$ مبهم

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$$a \times (+\infty) = \begin{cases} +\infty & a > 0 \\ \text{مبهم} & a = 0 \\ -\infty & a < 0 \end{cases}$$

Subject 69
Date

00:19 /90

مثال) حدود زیر را محاسبه کنید.

1) $\lim_{x \to 1^+} \frac{2x+3}{1-x} = \frac{5}{0^-} = -\infty$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x$	$+$	ϕ	$-$

$x \simeq 1/01$

$\underbrace{1 - 1/01 = -0/01}$

$x > 1$

$0 > 1-x$

00:22 /9

2) $\lim_{x \to 2^-} \frac{-4x}{x-2} = \frac{-8}{0^-} = +\infty$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	ϕ	$+$

3) $\lim_{x \to 2^-} \frac{-x+3}{(x-2)^3} = \frac{+1}{0^-} = -\infty$

چون توان فرد هست
علامت تغییر نمی‌کند

x	$-$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	ϕ	$+$

basamar

Subject 70

Date

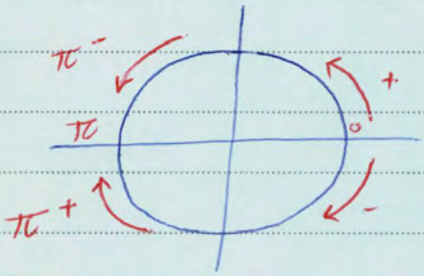
(4) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-1}{x^4}$ 1:15 / 14

(5) $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \left(\dfrac{-2x}{x+1}\right)^5$ 1:16 / 14

00:33 / 10

(6) $\lim\limits_{x \to \pi^+} \cot x = \lim\limits_{x \to \pi^+} \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{\cos \pi^+}{\sin \pi^+} = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$

ناحیه سوم



π^+: زاویه‌ای بیشتر از π

(7) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x$

1:13 / 14

Subject 71
Date

حد در بی نهایت :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

x	1	2	10	100	1000	$\cdots 10^6$
$f(x) = \frac{1}{x}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10^6}$

نکته :
$$\frac{\text{عدد}}{\text{بی نهایت}} = 0 \qquad \frac{1}{+\infty} = 0$$

3) حد نامتناهی در بی نهایت :

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

1) $$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$

x	-1	-10	-100	-10^3	$-10^4 \cdots$
$f(x) = x^2$	1	100	10^4	10^6	10^8

نکته)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0\right) \quad (a_n \neq 0)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

$$\lim \frac{\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0\right)}{\left(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots b_1 x + b_0\right)}$$

$$= \lim \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} \pm\infty & n > m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & n = m \\ 0 & n < m \end{cases}$$

$$\frac{x^7}{x^3} = x^4 \qquad \frac{x^3}{x^7} = \frac{1}{x^4}$$

00:59 /10

مثال)

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(8x^2 - 7x^3 + 2x + 1\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-7x^3\right) = 7\times(+\infty) = -\infty$

2) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{5x^3 - 8x + 1}{-4x^3 + 2x} = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{5\cancel{x^3}}{-4\cancel{x^3}} = \dfrac{-5}{4}$

3) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{5x - 7x^4}{8x^3 + 2x - 1} = \lim_{x\to-\infty}\dfrac{-7x^4}{8x^3} = \lim_{x\to-\infty}\dfrac{-7}{8}x = \dfrac{-7}{8}(-\infty) = +\infty$

Subject 73
Date

(4) $\lim_{x \to +\infty} \left(\underbrace{2x+1} + \underbrace{\frac{3x-1}{x+1}} \right) = (+\infty) + 3 = +\infty$

رفع ابهام حالت $\frac{\infty}{\infty}$ ؛ اگر حد $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$

آنگاه حد را مبهم گوییم و باید آن را رفع ابهام نماییم. عامل مبهم در این حالت

x می‌باشد که باید از صورت و مخرج کسر حذف شود.

1:15 / 10

(1) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+x+1}} = \frac{-\infty}{+\infty}$ مبهم

رفع ابهام $= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(2+\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(2+\frac{5}{x}\right)}{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$

$\begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ $= \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x}\left(2+\frac{5}{x}\right)}{-\cancel{x}\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{2}{-\sqrt{4}} = -1$

$\frac{2x}{x} = 2 \quad \frac{5}{x}$

$\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$

$\sqrt{x^2} = |x|$

(2)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x+x^2}}{4x-1} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{مبهم}$$

رفع ابهام
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(\frac{2}{x}+1\right)}}{x\left(4-\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{\frac{2}{x}+1}}{x\left(4-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt{\cancel{\frac{2}{x}}_{0}+1}}{\cancel{x}\left(4-\cancel{\frac{1}{x}}_{0}\right)} = \frac{\sqrt{1}}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$$

$$\frac{x^2}{x^2} = 1$$

رفع ابهام حالت $\infty - \infty$: این حالت زمانی اتفاق می‌افتد که

در جمع یا تفریق عبارات رادیکالی باشیم یا اینکه در جمع و تفریق کسرهایی باشیم که مخرج آنها

صفر است و برای رفع ابهام در حالت اول، باید عبارت رادیکالی در مزدوجش ضرب و تقسیم کنیم.

با این کار حد از حالت مبهم $\infty - \infty$ به حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل می‌شود، که با استفاده

روش قبل آن را رفع ابهام می‌کنیم.

$$\frac{1}{0^+} + \frac{1}{0^-}$$

$$\sqrt{} - \sqrt{}$$

$$\sqrt{} + x$$

$$x \to -\infty$$

$$\frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{\boxed{}}{()()} = \frac{\text{عدد}}{0^+ \text{ یا } 0^-} = \pm\infty$$

برای رفع ابهام در حالتی که با جمع و تفریق کسرهایی که مخرج آنها صفر است مواجه ایم باید بین مخرج ها مخرج مشترک بگیریم، در این صورت پس از ساده کردن صورت و مخرج داخل مقدار a به جای x ها حاصل حد $\pm\infty$ بدست می آید

$x \to a^+ \text{ یا } a^-$

1:43 / 10

مثال)

1) $\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+3x}+x\right) = (+\infty)+(-\infty) = \infty-\infty$ مبهم

رفع ابهام $= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+3x}+x\right) \times \dfrac{\sqrt{x^2+3x}-x}{\sqrt{x^2+3x}-x}$

$\lim_{x\to -\infty} \dfrac{\cancel{x^2}+3x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+3x}-x} = \dfrac{-\infty}{+\infty}$ مبهم

$+\infty-(-\infty) = +\infty+\infty$

رفع ابهام $= \lim_{x\to -\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)}-x} = \lim_{x\to -\infty} \dfrac{3\cancel{x}}{-\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1\right)}$

$(-x)$ $\quad \frac{3}{x} \to 0$

$= \dfrac{3}{-(1+1)} = \boxed{-\dfrac{3}{2}}$

Subject 76
Date

00:06 /11

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-2x}-\sqrt{x^2+5}\right)=\infty-\infty$ مبهم

رفع ابهام $\lim\left(\dfrac{\sqrt{4x^2-2x}-\sqrt{x^2+5}}{1}\right)\times\dfrac{\sqrt{4x^2-2x}+\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{4x^2-2x}+\sqrt{x^2+5}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-2x-x^2-5}{\sqrt{4x^2-2x}+\sqrt{x^2+5}}=\dfrac{\infty}{\infty}$ مبهم

رفع ابهام $\lim\dfrac{x^2\left(3-\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}{x\left(\sqrt{4-\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}\right)}=\dfrac{+\infty}{3}=+\infty$ $\quad 5=\dfrac{5x^2}{x^2}$

00:18 /11

(3) $\lim\limits_{x\to-4^+}\left(\dfrac{2}{x^2+3x-4}+\dfrac{3}{x+4}\right)$

$x^2+3x-4=0\to(x+4)(x+1)=0$

$x=-4 \qquad x=1$

x	$-\infty$	-4		1	$+\infty$
مخرج	$+$	0	$-$	0	$+$

$16-12-4=0$

$=\dfrac{2}{0^-}+\dfrac{3}{0^+}=$

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$x+4$	$-$	0	$+$

$-\infty+(+\infty)=\infty-\infty$ مبهم

رفع ابهام ، $\lim\limits_{x\to-4^+}\dfrac{2+3(x-1)}{(x+4)(x+1)}=\lim\limits_{x\to(-4)^+}\dfrac{3x-1}{(x+4)(x+1)}=\dfrac{-13}{0^-}=+\infty$

Subject 77

Date 1:9 / 74

ت (٤) $\lim_{x \to ٢^-} \left(\frac{١}{x-٢} - \frac{٣}{x^٢-٤} \right)$

رفع ابهام حالت $0 \times \infty$: اگر $\lim_{x \to a} f(x) \times g(x) = 0 \times \infty$

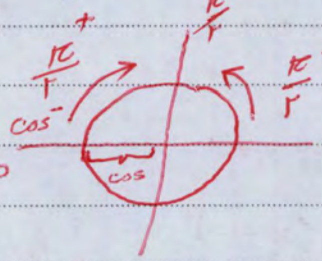
آنگاه برای رفع ابهام حد را به صورت $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ تبدیل می‌کنیم

که حالت مبهم $\frac{0}{0}$ ایجاد می‌شود.

00:32 / 11

(1) $\lim_{x \to \frac{\pi}{٢}^+} \left((1 + \cos ٢x) \tan x \right) = 0 \times (-\infty)$ مبهم

$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$



$\cot x \left(\frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} \right) = \frac{\cos x}{\sin x}$

$= \lim_{x \to \frac{\pi}{٢}^+} \frac{1 + \cos ٢x}{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{٢}^+} \frac{٢\cos^٢ x}{\frac{\cos x}{\sin x}} =$ صفحه بعد

basamar

شماره 9 اتحادات) $\cos^٢ x = \frac{1 + \cos ٢x}{٢} \rightarrow \boxed{٢\cos^٢ x = 1 + \cos ٢x}$

Subject 78

Date 00:40 /11

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{2 \sin x \cos^{\cancel{2}} x}{\cancel{\cos x}} = 2 \overset{1}{\sin \frac{\pi}{2}} \overset{0}{\cos \frac{\pi}{2}} = 0$$

② $$\lim_{x \to +\infty} \left((x-1)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1\right) \right) = \infty \times 0 \quad \text{مبهم}$$

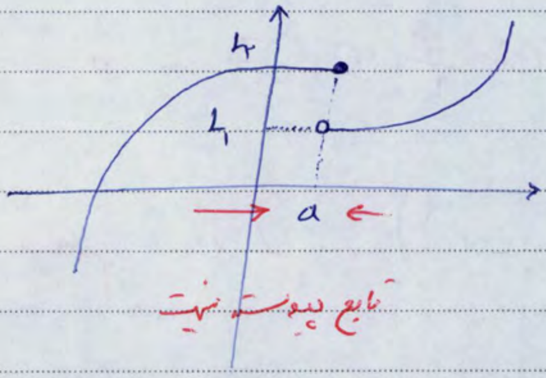
رفع ابهام : $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x-1}} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

رفع ابهام : $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x-1}} \times \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{1} + \frac{1}{x} \cancel{-1}}{\frac{1}{x-1}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x\underbrace{\left(\sqrt{1+\cancel{\frac{1}{x}}^{\,0}} + 1\right)}_{2}} = \frac{1}{2}$$

"پیوستگی"



$$f(a) = L_2$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1$$

تعریف: تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته است هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

مثال) مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که توابع زیر بر $\mathbb{R}$ پیوسته باشند.

1:04 /11

$$(1)\quad f(x) = \begin{cases} x + 2a & ; \quad x \leq -2 \\ 3ax + b & ; \quad -2 < x < 1 \\ 3x - 2b & ; \quad 1 \leq x \end{cases}$$

شرط پیوستگی در نقطه $x = -2$:

$$\lim_{x \to (-2)^+} f(x) = \lim_{x \to (-2)^+} (3ax + b) = -6a + b$$

$$\lim_{x \to (-2)^-} f(x) = \lim_{x \to (-2)^-} (x + 2a) = -2 + 2a = f(-2)$$

Subject 80
Date

شرط پیوستگی : $-6a+b=-2+2a \Longrightarrow \boxed{-8a+b=-2}$

شرط پیوستگی در نقطه $x=1$:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (3x-2b) = 3-2b = f(1)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (3ax+b) = 3a+b$$

شرط پیوستگی : $3a+b=3-2b \Longrightarrow 3a+3b=3$

$$\xrightarrow{\div} \boxed{a+b=1}$$

$$-\times \begin{cases} -8a+b=-2 \\ a+b=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 8a-\cancel{b}=2 \\ a+\cancel{b}=1 \end{cases} \quad \boxed{b=\frac{2}{3}}$$

1:15 /11

$$9a=3 \longrightarrow \boxed{a=\frac{1}{3}}$$

2) $f(x) = \begin{cases} ax^2+bx+1 & ; \ |x|<2 \\ |x-1| & ; \ |x|\geq 2 \end{cases}$

$$= \begin{cases} ax^2+bx+1 & ; \ -2<x<2 \\ |x-1| & ; \ x\geq 2 \text{ یا } x\leq -2 \end{cases}$$

Subject 81
Date

شرط پیوستگی در نقطه $x=-2$:

$$4a-2b+1=3$$

$$4a-2b=2 \xrightarrow{\div} \boxed{2a-b=1}$$

شرط پیوستگی در نقطه $x=2$:

$$4a+2b+\cancel{1}=\cancel{1} \xrightarrow{\div} \boxed{2a+b=0}$$

$$\begin{cases} 2a-\cancel{b}=1 \\ 2a+\cancel{b}=0 \end{cases}$$

$$4a=1 \longrightarrow \boxed{a=\frac{1}{4}}$$

$$b=-2a \longrightarrow \boxed{b=\frac{-1}{2}}$$

$$\begin{cases} 2a-\cancel{b}=1 \\ 2a+\cancel{b}=0 \end{cases}$$

$$4a=1 \longrightarrow \boxed{a=\frac{1}{4}}$$

$$b=-2a \longrightarrow \boxed{b=-\frac{1}{2}}$$

Subject 82
Date

فصل سوم   مشتق و کاربرد آن

تعریف : فرض کنیم f یک تابع و $a \in D_f$

اگر $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ موجود باشد ، می‌گوییم تابع f در نقطه

$x = a$ مشتق‌پذیر است و مقدار این حد را با نماد $f'(a)$ نشان می‌دهیم

و آن را مشتق تابع f در نقطه a می‌نامیم.

مثال) مشتق توابع زیر را در نقاط داده شده با استفاده از تعریف مشتق

بدست آورید.

① $f(x) = x^۲ - ۲x$ ، $x = ۳$

$$f'(۳) = \lim_{x \to ۳} \frac{f(x) - f(۳)}{x - ۳} = \lim_{x \to ۳} \frac{x^۲ - ۲x - ۳}{x - ۳}$$

$$f(۳) = ۳^۲ - ۲(۳) = ۹ - ۶ = ۳$$

$$= \lim_{x \to ۳} \frac{\cancel{(x-۳)}(x+۱)}{\cancel{(x-۳)}} = ۳ + ۱ = ٤$$

۱:۲۷ / ۱۱

basamar

Subject 83
Date

ت (۲) $f(x) = \sqrt{2x+1}$ ، $x = 4$ 1:05 / 14

مشتق راست: $f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$

مشتق چپ: $f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$

تابع در نقطه a مشتق پذیر است هرگاه $f'_+(a) = f'_-(a)$

تذکر: اگر تابع f در نقطه $x = a$ مشتق پذیر باشد آنگاه در این نقطه پیوسته است. * اثبات: شرط پیوستگی در نقطه a یعنی $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ثابت می کنیم $\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = 0$

$$\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) \times \frac{x-a}{x-a}$$

$$= \left(\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}\right) \times \lim_{x \to a} (x-a) = f'(a) \times 0 = 0$$

Subject 84
Date

تذکر: عکس نقیض گزاره فوق برقرار است: $(p \to q) \cong (\sim q \Rightarrow \sim p)$

یعنی اگر تابعی در نقطه a ناپیوسته باشد آنگاه در این نقطه مشتق پذیر نیست.

تذکر: عکس قضیه فوق در حالت کلی برقرار نمی‌باشد یعنی تابعی وجود دارد که در نقطه a پیوسته

است اما مشتق پذیر نیست.

تمرین: نشان دهید تابع $f(x) = |x|$ در نقطه $x = 0$ پیوسته است

ولی در این نقطه مشتق پذیر نیست

1:00 / 14

basamar

تعریف : اگر f یک تابع مشتق پذیر باشد آنگاه ضابطه تابع f' از رابطه زیر بدست می آید.

$$f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

00:17 /12 مثال) مشتق توابع زیر را با استفاده از تعریف مشتق بدست آورید

1) $f(x) = x^2 + 2x - 1$ $\qquad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)+2(x+h)\cancel{-1}-x^2-2x\cancel{+1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2+\cancel{2x}+2h-\cancel{x^2}-\cancel{2x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h+2)}{h} = 2x+2$$

00:27 /12

2) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ $\qquad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\lim \frac{\frac{x+h}{x+h+1} - \frac{x}{x+1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{(x+h)(x+1)-x(x+h+1)}{(x+h+1)(x+1)}}{\frac{h}{1}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2}+\cancel{x}+\cancel{hx}+\cancel{h}-\cancel{x^2}-\cancel{xh}-\cancel{x}}{\cancel{h}(x+h+1)(x+1)} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Subject 86
Date 00:29 /12

(3) $f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{}$$

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{\sin x(\cos h - 1)}{h}}_{=0} + \frac{\cos x \overset{1}{\sin h}}{h} = \cos x$$

اثبات

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} \times \frac{(\cos h + 1)}{(\cos h + 1)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos^2 h - 1)}{h(\cos h + 1)} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(-\sin^2 h)}{h(\cos h + 1)}$$

$$\sin^2 h + \cos^2 h = 1 \implies \cos^2 h - 1 = -\sin^2 h$$

$$= \lim_{h\to 0} \underset{1}{\frac{\sin h}{h}} \times \frac{-\sin x \sin h}{(\cos h + 1)} = 1 \times \frac{-\sin x \times \overset{0}{\sin 0}}{\underset{1}{\cos 0} + 1} = 1 \times \frac{0}{2} = 0$$

Subject 87
Date

00:57 / 74

(4) $f(x) = x^{۳} + ۱$

(5) $f(x) = \sqrt{۲x + ۱}$

00:53 / 74

basamar

Subject 88
Date

تعاریف مشتق :

① $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

② $(af(x))' = af'(x)$

③ $(f(x) \times g(x))' = f'(x) \times g(x) + g'(x) \times f(x)$

④ $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \times g(x) - g'(x) \times f(x)}{[g(x)]^{۲}}$

⑤ $(f(g(x)))' = g'(x) \times f'(g(x))$

فرمول های مشتق :

① $f(x) = C \longrightarrow f'(x) = ۰$

② $f(x) = x \longrightarrow f'(x) = ۱$

③ $f(x) = ax \longrightarrow f'(x) = a$

④ $f(x) = x^n \longrightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

⑤ $f(x) = \sqrt{x} \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{۲\sqrt{x}}$

⑥ $f(x) = \sqrt[n]{x^m} \longrightarrow f'(x) \; \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$

basamar

(مشتقات توابع مثلثاتی)

7) $f(x) = \sin x \longrightarrow f'(x) = \cos x$

8) $f(x) = \cos x \longrightarrow f'(x) = -\sin x$

9) $f(x) = \tan x \longrightarrow f'(x) = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$$1 + \tan^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

کسکانت x

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

سکانت x

10) $f(x) = \cot x \longrightarrow f'(x) = -(1 + \cot^2 x) = -\csc^2 x$

11) $f(x) = \sec x \longrightarrow f'(x) = \sec x \cdot \tan x$

12) $f(x) = \csc x \longrightarrow f'(x) = -\csc x \cdot \cot x$

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{\overbrace{(\sin x)'}^{\cos x} \times \cos x - \overbrace{(\cos x)'}^{-\sin x} \times \sin x}{\underbrace{}_{}\cos^2 x} = \frac{\overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}^{1}}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

Subject 90
Date

(مشتقات توابع نمایی)

(13) $f(x) = a^x \longrightarrow f'(x) = (\ln a)\, a^x$

(14) $f(x) = e^x \longrightarrow f'(x) = e^x$ $\ln e = 1$ $\ln e = \log_e^e = 1$

(15) $f(x) = \log_a^x \longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{(\ln a)\, x}$

(16) $f(x) = \ln x \longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$

مثال) مشتق توابع زیر را بنویسید. 1:17 / 12

(1) $f(x) = \frac{1}{4}x^8 - x^4$ $f'(x) = \frac{1}{4} \times 8x^7 - 4x^3 = 2x^7 - 4x^3$

(2) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+2}$ $f'(x) = \dfrac{(2x-3)' \times (x+2) - (x+2)' \times (2x-3)}{(x+2)^2}$

$= \dfrac{2(x+2) - (2x-3)}{(x+2)^2} = \dfrac{7}{(x+2)^2}$

(3) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{3x + 2}$ $f'(x) = \dfrac{(2x+2)(3x+2) - 3(x^2+2x-1)}{(3x+2)^2}$

(4) $f(x) = (x^2 - 5x)(x^7 - 8x + 1)$ $f'(x) = (2x - 5)(x^7 - 8x + 1)$

$+ (7x^6 - 8)(x^2 - 5x)$

(5) $f(x) = x^2 \cot x$ $f'(x) = 2x \cot x \mp (1 + \cot^2 x)\, x^2$

$-(1 + \cot^2 x)$

Subject 91
Date

1:30 / 12

(6) $f(x) = 4\cos x - x\sin x$

ت (7) $f(x) = x^3 \sec x$

ت (8) $f(x) = \dfrac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$

ت (9) $f(x) = \dfrac{2\sin x}{2 + x}$ 00:48 / 14

(10) $f(x) = x^3 \ln x$ $\quad f'(x) = 3x^2 \ln x + \dfrac{1}{x} x^3$

(11) $f(x) = e^x \cos x$ $\quad f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x$

ت (12) $f(x) = (x^2 + x)(e^x + 1)$

00:47 / 14

(13) $f(x) = \log_3 x - x e^x$ $\quad f'(x) = \dfrac{1}{(\ln 3)x} - (e^x + x e^x)$

Subject (92)
Date 1:42 /12

(14) $f(x) = 5^x \sin x \quad f'(x) = (\ln 5)\, 5^x \sin x + 5^x \cos x$

$(a^x)' = (\ln a)\, a^x$

ت (15) $f(x) = (2 + \ln x)(e^x + 3)$ 00:45/14

فرمول های کلی مشتق:

u تابعی برحسب x باشد:

1) $f(x) = u^n \longrightarrow f'(x) = n u' u^{n-1}$

2) $f(x) = \sqrt{u} \longrightarrow f'(x) = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

3) $f(x) = \sqrt[n]{u^m} \longrightarrow f'(x) = \dfrac{m u'}{n \sqrt[n]{u^{n-m}}}$

4) $f(x) = \sin u \longrightarrow f'(x) = u' \cos u$

5) $f(x) = \cos u \longrightarrow f'(x) = u' \sin u$

6) $f(x) = \tan u \longrightarrow f'(x) = u'(1 + \tan^2 u) = u' \sec^2 u$

7) $f(x) = \cot u \longrightarrow f'(x) = -u'(1 + \cot^2 u) = -u' \csc^2 u$

(8) $f(x) = \sec u \longrightarrow f'(x) = u' \sec u \cdot \tan u$

(9) $f(x) = \csc u \longrightarrow f'(x) = -u' \cos u \cdot \cot u$

(10) $f(x) = a^{u} \longrightarrow f'(x) = (\ln a)\, u'\, a^{u}$

(11) $f(x) = e^{u} \longrightarrow f'(x) = u' e^{u}$

(12) $f(x) = \log_a^{u} \longrightarrow f'(x) = \dfrac{u'}{(\ln a)\, u}$

(13) $f(x) = \ln u \longrightarrow f'(x) = \dfrac{u'}{u}$

00:12/43

مثال) مشتق توابع زیر را بدست آورید.

1) $f(x) = (٣x - x^{٣})^{٥}$

$f'(x) = ٥(٣ - ٣x^{٢})(٣x - x^{٣})^{٤}$

2) $f(x) = \sqrt[٣]{(x^{٢} - ٥x)^{٢}}$ $\quad f'(x) = \dfrac{٢(٢x - ٥)}{٣\sqrt[٣]{(x^{٢} - ٥x)^{١}}}$

3) $f(x) = \cos(٣x^{٢} + ٣)$

ت 4) $f(x) = \tan(٢x + ١)$

ت 5) $f(x) = \cos ٣x - ٢\sin ٥x$

Subject 93
Date

6) $f(x) = \tan(۲x) + \cos ۷x$ $\quad f'(x) = ۲(1+\tan^۲(۲x)) - ۷\sin ۷x$

7) $f(x) = \sin ۵x \cdot \cot ۲x$ $\qquad$ 00:23 /13

$f'(x) = ۵\cos ۵x \cdot \cot ۲x - ۲(1+\cot^۲ ۲x)\sin ۵x$

8) $f(x) = x^۲ \sin(۲x+1)$

$f'(x) = ۲x \sin(۲x+1) + ۲\cos(۲x+1) \times x^۲$

9) $f(x) = \sqrt{\sin(۲x - x^۲)}$

$$f'(x) = \frac{(۲-۲x)\cos(۲x-x^۲)}{۲\sqrt{\sin(۲x-x^۲)}}$$

10) $f(x) = \sin^۳ ۵x$ $\qquad$ 00:31 /13

$f'(x) = ۳(\sin ۵x)'(\sin^۲ ۵x) = ۳(۵)\cos(۵x)(\sin^۲ ۵x)$

$\left(\underbrace{\sin ۵x}_{u}\right)^{۳} \longrightarrow ۳u'u^۲$

$\sin u \longrightarrow u'\cos u$

11) $f(x) = ۲e^{۵x}+1$ $\qquad f'(x) = ۲\times۵\, e^{۵x}$

$(e^u)' = u' e^u$

Subject 94
Date

12) $f(x) = ٤^{\sin x} \longrightarrow f'(x) = (\ln ٤)(\cos x)(٤^{\sin x})$

$(a^x)' = (\ln a)\, a^x$

$(a^u)' = (\ln a)\, u' a^u$

13) $f(x) = e^x \cos(e^x) \rightarrow f'(x) = e^x \cos(e^x) - e^x \sin(e^x) \times e^x$

00:55 / 13 $\quad -u' \sin u$

14) $f(x) = x^{۵} e^{-۳ \ln x} \longrightarrow f'(x) = ۵x^{٤} e^{-۳\ln x} - ۳\frac{1}{x} e^{-۳\ln x} \times x^{۵}$

$(e^u)' = u' e^u$

(روش دوم)

$f(x) = x^{۵} e^{\ln x^{-۳}} = x^{۵} \times x^{-۳} = x^{۲} \qquad f'(x) = ۲x \quad \cancel{\mathbb{R}}$

$(۰, +\infty)$

$= ۵x^{٤} \times x^{-۳} \times \frac{1}{x} \times x^{-۳} \times x^{\cancel{۵}\,٤} = ۵x - ۳x = ۲x$

15) $f(x) = \ln(۲x + ۲)$

00:42 / 14

basamar

Subject 95
Date

1:03 / 13

16) $f(x) = \ln\left(\sqrt[3]{4+2x}\right)$ $\ln u \longrightarrow \dfrac{u'}{u}$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(4+2x)^2}}}{\sqrt[3]{4+2x}}$$

ت 17) $f(x) = \cos(\ln x)$ 00:40 / 14

00:38 / 14

ت 18) $f(x) = \ln(\ln(x+1))$

قاعده هوپیتال: اگر تابع f و g در هر نقطه فاصله باز I شامل نقطه a

مشتق پذیر و g' در هر نقطه این فاصله مخالف صفر باشد و داشته باشیم: (مبهم)

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \quad \text{و} \quad \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$
آنگاه:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

basamar

Subject 96
Date

1:11 / 13

1) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x^2+x+1}{2x^2-x-1} = \frac{0}{0}$ مبهم حدود زیر را محاسبه کنید (مثال

$\overset{hop}{=} \lim_{x\to 1} \frac{3x^2-6x+1}{4x-1} = \frac{3-6+1}{4-1} = \frac{-2}{3}$

2) $\lim_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{x-1} \overset{hop}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\pi \cos \pi x}{1}$ 1:22

$= \pi \underbrace{\cos \pi}_{-1} = -\pi$ $(\sin u)' = u' \cos u$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{e^{4x}-1} \overset{hop}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{4e^{4x}} = \frac{0}{4\times 1} = 0$

ت 4) $\lim_{x\to -1} \frac{2x+3-\sqrt{x+2}}{\sqrt{3x+4}-1}$ 00:35/14

ت 5) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 3x - \cos 3x + 1}$

00:32/14

basamar

رفع ابهام حالت 1^{∞} :

الف) $\lim_{x\to a} (f(x))^{g(x)} = 1^{\infty}$ آنگاه حد مبهم است و برای رفع

ابهام داریم :

$$\text{رفع ابهام} = e^{\lim_{x\to a} (f(x)-1)\times g(x)}$$

① $\lim_{x\to +\infty} \left(1-\frac{3}{x}\right)^{x} = 1^{\infty}$ مبهم

1.33/13

$$\text{رفع ابهام} = e^{\lim_{x\to +\infty} (\cancel{1}-\frac{3}{\cancel{x}}\cancel{-1})\times \cancel{x}} = e^{-3}$$

② $\lim_{x\to 0^+} (1-2x)^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty}$ مبهم

$$\text{رفع ابهام} = e^{\lim_{x\to 0^+} (\cancel{1}-2\cancel{x}\cancel{-1})\times \frac{1}{\cancel{x}}} = e^{-2}$$

③ $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = 1^{+\infty}$ مبهم

$$\text{رفع ابهام} = e^{\lim_{x\to 0} (\cos x-1)\times\frac{1}{x^2}}$$ = محاسبه حد : $= e^{\frac{-1}{2}}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \longrightarrow \cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\cos x-1)}{x^2}\times\frac{(\cos x+1)}{(\cos x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2(\cos x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x^2(\cos x+1)} = \frac{-1}{2}$$

Subject 98
Date 00:25 / 14

ت ④ $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$ $\qquad e^{\lim (f(x)-1)\times g(x)}$

رفع ابهام حالت 0^0 و ∞^0 و

اگر حاصل حد $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ به صورت 0^0 یا ∞^0 باشد حد را مبهم می‌گوییم

برای رفع ابهام ابتدا $y=f(x)^{g(x)}$ را قرار می‌دهیم. حال از طرفین تساوی Ln می‌گیریم:

$$\lim_{x\to a} Ln\, y = Ln\, f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} g(x)\, Ln\,(f(x))$$

با محاسبه حد سمت راست به جایی مانند L می‌رسیم. در این صورت:

$$\lim_{x\to a} Ln\, y = L \qquad \boxed{e^{Ln\, x} = x}$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین e می‌گیریم}} \lim_{x\to a} y = e^{L} \longrightarrow \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{L}$$

basamar

Subject 99

Date 1:54/13

1) $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{\sin x}\right)^x = \left(\frac{1}{0^+}\right)^0 = (+\infty)^0$ مبهم

رفع ابهام $y = \left(\frac{1}{\sin x}\right)^x = (\sin x)^{-x}$

$\xrightarrow{Ln} Ln\, y = Ln(\sin x)^{-x} = -x\, Ln(\sin x)$

$\xrightarrow{Lim} \lim_{x \to 0^+} Ln\, y = \lim_{x \to 0^+} -x\, Ln(\sin x) = 0 \times (-\infty)$ مبهم

$\longrightarrow \lim Ln\, y = \lim_{x \to 0^+} \frac{Ln(\sin x)}{\frac{-1}{x}} = \frac{-\infty}{-\infty}$ مبهم

رفع ابهام $\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 \cos x}{\sin x} = \frac{0}{0}$ مبهم

رفع ابهام $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^1 (x \cos x) = 1 \times (0 \times 1) = 0$

$\longrightarrow \lim_{x \to 0^+} Ln\, y = 0 \longrightarrow \lim_{x \to 0^+} y = \boxed{e^0 = 1}$

Subject 100

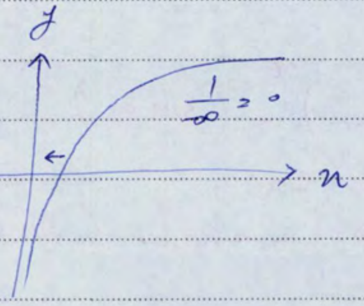
Date

00:28 / 14

(2) $\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}}$

$\ln(+\infty) = +\infty$

$\ln(0^+) = -\infty$



$\ln(1) = 0$

basamar

Subject 101

Date

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$ 00:19/14

"فصل چهارم : انتگرال و روش‌های انتگرال گیری"

$$\begin{tikzcd} f(x)\ \sin x \arrow[r, bend left, "\text{مشتق}"] & f'(x) = \cos x \arrow[l, bend left, "\text{انتگرال}"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} f(x) = x^{٤} \arrow[r, bend left, "\text{مشتق}"] & f'(x) = ٤x^{٣} \arrow[l, bend left, "\text{انتگرال}"] \end{tikzcd}$$

Subject 102
Date

تعریف: اگر تابع f مشتق پذیر باشد و مشتق آن را با تابع g نشان دهیم

آنگاه انتگرال تابع g برابر است با تابع $f(x)+C$

$$\int g(x)\,dx = f(x)+C$$

$$f(x) = \sin x + C \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = \cos x$$

انتگرال

خصلتهای انتگرال:

① $$\int \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

② $$\int a f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx$$

تذکر:

① $$\int \left(f(x) \times g(x)\right) dx \neq \left(\int f(x)\,dx\right) \times \left(\int g(x)\,dx\right)$$

$$\int x \sin x\,dx \neq \left(\int x\,dx\right) \times \left(\int \sin x\,dx\right)$$

② $$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx \neq \frac{\int f(x)\,dx}{\int g(x)\,dx}$$

Subject 103

Date

فرمول‌های انتگرال :

1. $\int a\,dx = ax + C$

2. $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^{2} + C$

★ 3. $\int x^{n}\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$

4. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$

5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

6. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

7. $\int (1+\tan^{2}x)\,dx = \int \sec^{2}x\,dx = \tan x + C$

8. $\int (1+\cot^{2}x)\,dx = \int \csc^{2}x\,dx = -\cot x + C$

9. $\int \sec x \cdot \tan x\,dx = \sec x + C$

10 $\int \csc x \cdot \cot x \, dx = -\csc x + C$

11 $\int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$

12 $\int e^x \, dx = e^x + C$

00:31 / 15

مثال) انتگرال‌های زیر را حل کنید.

1) $\int (x^2 - 2x + 3) \, dx = \int x^2 dx - 2\int x \, dx + \int 3 \, dx = \frac{1}{3} x^3 - \cancel{2} x \frac{1}{\cancel{2}} x^2 + 3x + C$

2) $\int (2x^4 - 5x^2 + 1) \, dx = 2 \times \frac{1}{5} x^5 - 5 \times \frac{1}{3} x^3 + x + C$

3) $\int \left(\frac{1}{x^2} - 5x\right) dx = \int (x^{-2} - 5x) \, dx = \frac{1}{-1} x^{-1} - 5 \times \frac{1}{2} x^2 + C$

$= \frac{-1}{x} - \frac{5}{2} x^2 + C$

4) $\int \left(\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2}\right) dx = \int (2x^{-3} - 3x^{-2}) \, dx$

$= 2 \times \frac{1}{-2} x^{-2} - 3 \times \frac{1}{-1} x^{-1} + C$

$= \frac{-1}{x^2} + \frac{3}{x} + C$

Subject 105

Date

00:45 / 15

5) $\int \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}\right) dx = \int \left(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}}\right) dx$

$= \frac{1}{\frac{2}{3}+1} x^{\frac{2}{3}+1} + \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + C$

$= \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$

6) $\int \left(2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \int \left(2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) dx$

$= 2\times \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2 x^{\frac{1}{2}} + C$

7) $\int \sqrt[3]{x}\,(x+2)\, dx = \int x^{\frac{1}{3}}(x+2)\, dx = \int \left(x^{\frac{4}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}}\right) dx$

$= \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} + 2\times \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C$

00:54 / 15

8) $\int \sqrt{x}\,(x^2+1)\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}(x^2+1)\, dx = \int \left(x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right) dx$

$= \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$

Subject 106
Date

$$9)\quad \int \frac{x^2+3\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{x^2+3x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}}+\frac{3x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}\right)dx = \int \left(x^{\frac{5}{3}}+3x^{\frac{1}{6}}\right)dx$$

$$2-\frac{1}{3}=\frac{6-1}{3}=\frac{5}{3} \qquad \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}$$

$$= \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} + 3\times\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$$

1:7 /.15

$$10)\quad \int \frac{x^3-5\sqrt[3]{x}}{x\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{x^3-5x^{\frac{1}{3}}}{x\times x^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{x^3}{x^{\frac{3}{2}}}-\frac{5x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}}\right)dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}}-5x^{\frac{-7}{6}}\right)dx$$

$$3-\frac{3}{2}=\frac{6-3}{2}=\frac{3}{2} \qquad \frac{1}{3}-\frac{3}{2}=\frac{2-9}{6}=\frac{-7}{6}$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 5\times(-6)x^{\frac{-1}{6}} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 30x^{\frac{-1}{6}} + C$$

Subject 107
Date

" روش های انتگرال گیری "

① **روش تغییر متغیر معمولی :** اگر انتگرال را نتوان با فرمول های انتگرال حل کرد ، ابتدا به سراغ روش تغییر متغیر معمولی می رویم . بدین صورت که هرگاه در داخل انتگرال یک تابع به همراه مشتقش وجود داشته باشد از روش تغییر متغیر معمولی استفاده می کنیم .

$$\int g'(x) \times f(\underbrace{g(x)}_{u})\, dx$$

$$= \int f(u)\, du$$

$$u = g(x) \longrightarrow du = g'(x)\, dx$$

انتگرال فوق برحسب متغیر u محاسبه می شود و در نهایت بجای u مقدار g(x) را جایگذاری می کنیم .

نکته : معمولا u را تابعی در نظر می گیریم که ، داخل پرانتز ، مخرج کسر ، داخل رادیکال ، داخل عبارت مثلثاتی و رادیکالی و یا توان عبارتهای نمایی باشد .

$u = g(x) \longrightarrow du = g'(u)\, dx$? جزء دیفرانسیلی مشتق

ادامه صفحه بعد

Subject 108
Date

$y = f(x)$ و $y' = f'(x)$

$$y' = \frac{dy}{dx} \Longrightarrow dy = y'\,dx$$

فرم دیفرانسیلی مشتق $\Longrightarrow$ $\boxed{dy = f'(x)\,dx}$

$u = g(x)$

$du = g'(x)\,dx$

مثال) 1:19/15

① $\displaystyle\int (\underbrace{\tfrac{1}{2}x - 2}_{u})^{4}\,dx$

$$= 2\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-2\right)^{4} dx = 2\int u^{4}\,du$$

$$= 2 \times \frac{1}{5}u^{5} + C = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}x-2\right)^{5} + C$$

$$u = \frac{1}{2}x - 2 \Longrightarrow du = \frac{1}{2}\,dx$$

ت

② $\displaystyle\int (5x-3)^{4}\,dx$

Subject 109

Date

3) $\int \frac{۳x^۲+۱}{\underbrace{(x^۳+x)}_{u}^{۴}}\,dx = \int \frac{۱}{u^۴}\,du$ 1:26/15

$= \int u^{-۴}\,du = \frac{-۱}{۳}u^{-۳} + C = \frac{-۱}{۳(x^۳+x)^۳} + C$

$u = x^۳+x \longrightarrow du = (۳x^۲+۱)\,dx$

4) $\int x^۲\sqrt[۳]{\underbrace{x^۳+۲}_{u}}\,dx = \frac{۱}{۳}\int ۳x^۲\sqrt[۳]{x^۳+۲}\,dx$

$= \frac{۱}{۳}\int \sqrt[۳]{u}\,du = \frac{۱}{۳}\int u^{\frac{۱}{۳}}\,du = \frac{۱}{\cancel{۳}} \times \frac{\cancel{۳}}{۴}u^{\frac{۴}{۳}}$

$u = x^۳+۲ \longrightarrow du = ۳x^۲\,dx$ | $= \frac{۱}{۴}(x^۳+۲)^{\frac{۴}{۳}} + C$

5) $\int \sin \underbrace{۴x}_{u}\,dx = \frac{۱}{۴}\int ۴\sin ۴x\,dx$ 1:34/15

$= \frac{۱}{۴}\int \sin u\,du = \frac{-۱}{۴}\cos u + C = \frac{-۱}{۴}\cos ۴x + C$

$u = ۴x \longrightarrow du = ۴\,dx$

① $\int \sin ax\,dx = \frac{-1}{a}\cos ax + C$

② $\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$

Subject 110
Date

1:37/15

5) $$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx = 2\int \cos u\,du = 2\sin u + C = 2\sin\sqrt{x} + C$$

$$u = \sqrt{x} \longrightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

② روش انتگرال گیری جزء به جزء :

فرمول این روش به صورت زیر است

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

برای انتخاب تابع u و dv ، معمولاً تابع را u در نظر می‌گیریم که مشتق گیری از آن ساده باشد یا اینکه مشتقات آن پس از چند مرحله به صفر ختم شود.

و تابعی را dv در نظر می‌گیریم که انتگرال گیری از آن ساده باشد.

$$\begin{cases} u = \bigcirc \xrightarrow{\text{مشتق}} \\ dv = \square \xrightarrow{\text{انتگرال}} \end{cases} \qquad \begin{cases} du = \text{-----} \\ v = \text{-----} \end{cases}$$

Subject ١١١

Date

1) $\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin x\, dx}_{dv}$ $\quad u = g(x) \longrightarrow du = g'(x)\, dx$

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x\, dx \end{cases} \begin{matrix} \xrightarrow{\text{مشتق}} \\ \xrightarrow{\text{انتگرال}} \end{matrix} \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

$$uv - \int v\,du = -x\cos x - \int -\cos x\, dx = -x\cos x + \sin x + C$$

1:52 / 15

2) $\int \underbrace{x^{2}}_{u} \underbrace{e^{x}\, dx}_{dv} = x^{2} e^{x} - \int \underbrace{2x}_{u} \underbrace{e^{x}\, dx}_{dv}$

① $$\begin{cases} u = x^{2} \\ dv = e^{x}\, dx \end{cases} \begin{matrix} \xrightarrow{\text{مشتق}} \\ \xrightarrow{\text{انتگرال}} \end{matrix} \begin{cases} du = 2x\, dx \\ v = e^{x} \end{cases}$$

② $$\begin{cases} u = 2x \\ dv = e^{x}\, dx \end{cases} \begin{matrix} \xrightarrow{\text{مشتق}} \\ \xrightarrow{\text{انتگرال}} \end{matrix} \begin{cases} du = 2\,dx \\ v = e^{x} \end{cases}$$

$$= x^{2} e^{x} - 2x e^{x} + \int 2 e^{x}\, dx = x^{2} e^{x} - 2x e^{x} + 2 e^{x} + C$$

Subject 112
Date

1:57 / 15

روش نردبانی (پلکانی)

$$\int x^{2} \sin x \, dx = -x^{2}\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$$

مشتق		انتگرال
x^2	+	$\sin x$
$2x$	−	$-\cos x$
2	+	$-\sin x$
0		$\cos x$

2:1 / 15

$$\int x^{2} e^{x} \, dx = x^{2}e^{x} - 2xe^{x} + 2e^{x} + C$$

مشتق		انتگرال
x^2	+	e^x
$2x$	−	e^x
2	+	e^x
0		e^x

2:4

$$\int \ln x \, dx = x\ln x - \int 1 \, dx = x\ln x - x + C$$

مشتق		انتگرال
$\ln x$	+	1
$\frac{1}{x}$	$-\int$	x

$$\frac{1}{\cancel{x}} \times \cancel{x} = 1$$

basamar

Subject 113

Date

2:8/15

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$\Longrightarrow \int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + C$$

مشتق		انتگرال
$\sin x$	$+$	e^x
$\cos x$	$-$	e^x
$-\sin x$	$+$	e^x

$$x = A + B - x \Longrightarrow \underbrace{x + x}_{2x} = \underbrace{A + B} \longrightarrow x = \frac{A+B}{2}$$